

Selectivitat: Càlcul diferencial

- 1 Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3 . Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2 , però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50% més car.

- a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$.
- b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

- 2 Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^{x-1}$.

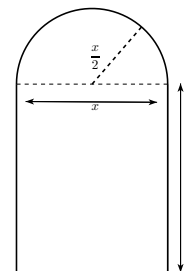
- a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.
- b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

- 3 Responen a les qüestions següents:

- a) Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
- b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

- 4 La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçada de cada columna.

- a) Comproveu que la funció $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.
- b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m , determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.



- 5 Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

- a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.
- b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

- 6 Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

- a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval $[0, 2]$.
- b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval $[0, 2]$ i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

- 7 Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2 .

- a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x , és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.
- b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

- 8 Un nedador és al mar en un punt N , situat a 3 km d'una platja recta, i just davant d'un punt S , situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A , situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S , de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S . El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h .

- a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S , demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{6 - x}{5}$.

- b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A , passant per P . Quin és el valor d'aquest temps mínim?

9] Considereu la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

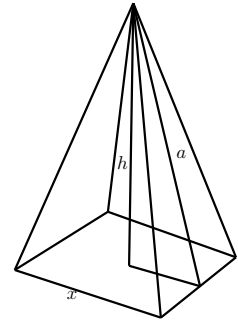
- a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f .
b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y = -5x + 4$.

10] Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax} + b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

- a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g .
b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x = 0$.

- 11] Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Dispossem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.

- a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas, $V(x) = \frac{x\sqrt{(9 \times 10^4 - x^4)}}{6}$.
b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).



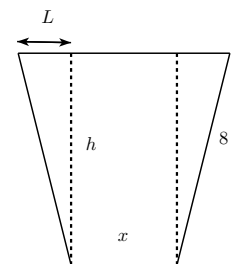
- 12] Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta $r: y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r . Calculeu el valor dels paràmetres a , b i c .

- 13] Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.

- a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal):
b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

- c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).



- 14] Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B .

- a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent:
 $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$.
b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

