

1.4 RADICALS

• $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$.

$\sqrt[n]{a}$ s'anomena **radical**; a , **radicand**; i n , **índex** de l'arrel.

• **Propietats:**

① $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

② $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

③ $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

④ $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

⑥ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

⑦ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

• Per a reduir a índex comú diversos radicals, podem expressar-los com a potències d'exponents fraccionaris i reduir-los a comú denominador.

1 Expressa els radicals següents mitjançant potències d'exponent fraccionari:

a) $\sqrt[6]{a^5}$

b) $\sqrt{a^3}$

c) $\sqrt[5]{3^4}$

d) $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt{n}$

f) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2 Escriu en forma d'arrel les potències següents:

a) $3^{4/5}$

b) $2^{1/2}$

c) $a^{3/4}$

d) $x^{-1/2}$

e) $a^{-3/4}$

f) $n^{1/2}$

g) $x^{-2/3}$

h) $5^{-1/2}$

i) $3^{-4/5}$

3 Simplifica, extraient els factors que puguis de l'arrel:

a) $\sqrt[3]{x^7}$

b) $\sqrt[4]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{x^9}$

d) $\sqrt{a^3}$

e) $\sqrt[3]{16}$

f) $\sqrt[3]{81}$

g) $\sqrt{32}$

h) $\sqrt{243}$

i) $\sqrt[5]{1024}$

4 Simplifica:

a) $\sqrt{a^3 x^2}$

b) $\sqrt[3]{x^5 y^6}$

c) $\sqrt{9x^3 y^2}$

d) $\sqrt{\frac{16a^5}{8a}}$

e) $\sqrt[3]{-81a^3}$

f) $\sqrt{1 + \frac{16}{9}}$

g) $\sqrt[3]{27a^4}$

h) $\sqrt{16x + 16}$

i) $\sqrt{25x^3 + 25x^2}$

5 Redueix cada cas a índex comú:

a) $\sqrt[4]{x^3}$ i $\sqrt[3]{x^2}$

b) $\sqrt{3}$ i $\sqrt[4]{3^5}$

6 Ordena de més petit a més gran els radicals següents, reduint-los prèviament a índex comú:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{25}$

c) $\sqrt[6]{6561}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt{18}$

7 Efectua i simplifica, si és possible:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{x}} \cdot x^{1/6}$

b) $\sqrt[3]{(\sqrt{n})^4}$

c) $3\sqrt{75} \cdot 4\sqrt{48}$

d) $\sqrt{\frac{12}{10}} \cdot \sqrt{\frac{27}{40}}$

e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^4$

f) $\sqrt{\frac{x^3 y^2}{z^6}} : \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3}{z^4}}$

g) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}} \cdot \sqrt{x^5}$

h) $(\sqrt{2}\sqrt{2})^3$

i) $\frac{5}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{a^4}} \cdot a^{1/3}$

j) $\frac{a^{-1/2} \cdot a^{3/4}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$

k) $\frac{a^{-4} \cdot a^{-1/3} \cdot \sqrt[3]{a}}{3\sqrt{a}}$

l) $(\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3})^2 : \sqrt[4]{27}$

m) $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}\right)^2 : \frac{1}{a^2}$

n) $\sqrt[3]{a^{-2}} : \sqrt[6]{a}$

o) $\left(\frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{2}}\right)^3$

p) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \frac{\sqrt{27}}{2}$

q) $\frac{(2\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt[3]{2}}{4}$

r) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \frac{\sqrt{125}}{2}$

EXERCICI RESOLT

Calcula i simplifica:

$$3\sqrt{72} - \sqrt{18} + 5\sqrt{2} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8}$$

RESOLUCIÓ

Descomponem en factors primers, extraiem els factors que puguem de l'arrel i simplifiquem:

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{2^3 \cdot 3^2} - \sqrt{2 \cdot 3^2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - 2\sqrt{2^3} = \\ & = 3 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} = \\ & = 18\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

8 Calcula i simplifica:

a) $9\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - 8\sqrt{300} - 4\sqrt{3}$

b) $\frac{3\sqrt{45}}{2} - \frac{\sqrt{20}}{3} + 4\sqrt{125} - \sqrt{5}$

c) $8\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{18}$

d) $\sqrt{1+x} - 4\sqrt{16+16x} + 3\sqrt{25+25x}$

e) $8\sqrt[3]{x^3 a^2} - \sqrt[3]{x^6 a^5}$

9 Calcula i simplifica:

a) $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$

b) $(1 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$

c) $(1 + \sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

e) $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

f) $(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6})$

g) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

h) $(2\sqrt{3} + 1)^2$

De vegades convé suprimir els radicals del denominador (racionalitzar).

- Per a suprimir una arrel quadrada, multipliquem per la mateixa arrel.
- Per a suprimir una arrel n -èsima, multipliquem per una altra arrel n -èsima de manera que es completi una potència n -èsima en el radicand.
- En una suma d'arrels quadrades, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, suprimim els radicals tot multiplicant per la diferència de les arrels (el conjugat), $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, i a la inversa.

EXERCICI RESOLT

Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{7}{\sqrt[5]{a^3}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓ

a) $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{7}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{7 \cdot \sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2}} = \frac{7\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{7\sqrt[5]{a^2}}{a}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2^2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{10}+2}{5-2} = \frac{\sqrt{10}+2}{3}$

10 Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{4}{\sqrt{27}}$

c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

e) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

f) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

g) $\frac{5}{\sqrt[5]{25}}$

h) $\frac{3}{\sqrt[3]{18}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

k) $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

l) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

11 Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{4}-\sqrt{7}}$

f) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$

g) $\frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}-1)}$

h) $\frac{1}{5\sqrt{3}+2}$

i) $\frac{1-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}$

j) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

k) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

l) $\frac{4+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$

12 Racionalitza i efectua, simplificant al màxim les expressions següents:

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{(3\sqrt{2}+1)^2}$

b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $1 + \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

f) $\frac{(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}}$

g) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$