

SUMA I DIFERÈNCIA DE SINUS I COSINUS

A partir del $\sin(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha - \beta)$, i anomenant $\alpha + \beta = A$ i $\alpha - \beta = B$, obtenim:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

EXERCICI RESOLT

Transforma en producte les sumes següents:

a) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$

b) $\cos 70^\circ - \cos 20^\circ$

c) $\sin 5x - \sin x$

RESOLUCIÓ

$$\bullet \sin 105^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\bullet \cos 70^\circ - \cos 20^\circ = -2 \sin \frac{70^\circ + 20^\circ}{2} \sin \frac{70^\circ - 20^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \cdot \sin 25^\circ = -\sqrt{2} \sin 25^\circ$$

$$\bullet \sin 5x - \sin x = 2 \cos \frac{5x + x}{2} \sin \frac{5x - x}{2} = 2 \cos 3x \sin 2x$$

4 Simplifica l'expressió $\frac{\sin 75^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 25^\circ}$.

5 Comprova que en simplificar l'expressió $\frac{\sin 80^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 80^\circ - \cos 50^\circ}$ obtens $-\frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ}$.

6 Transforma la suma i la diferència en producte per a trobar, sense emprar la calculadora, el valor de l'expressió $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$.

7 Si $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin \beta = \frac{3}{5}$, essent α i β angles del primer quadrant, troba les raons trigonomètriques de $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, 2α i $\frac{\beta}{2}$.

APLICACIONS DE LES FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES

EXERCICI RESOLT

Prova que $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x = \operatorname{tg} x$

RESOLUCIÓ

$$\begin{aligned} \text{Substituïm } \cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos x}{2} \rightarrow 2 \operatorname{tg} x \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) - \sin x = \\ &= \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cos x - \sin x = \operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{\cos x} \cos x - \sin x = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

8 Si $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula sense trobar prèviament el valor de α :

a) $\sin 2\alpha$

b) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

c) $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

d) $\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$

9 Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}$ i $\sin \alpha < 0$, calcula les raons trigonòmriques següents sense trobar α :

a) $\sin \frac{\alpha}{2}$

b) $\cos 2\alpha$

c) $\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$

d) $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$

10 Simplifica l'expressió $\frac{\sin 5\alpha + \sin \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha}$.

11 Demuestra que $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \alpha$.

12 Simplifica l'expressió $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$.

13 Demuestra que $\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) = \cos \beta$.

14 Prova que $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{-1}{\cos \alpha}$.

15 Simplifica l'expressió $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

16 Prova que $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

17 Expressa $\cos 4\alpha$ en funció de $\cos \alpha$. Tingues en compte que $4\alpha = 2(2\alpha)$ i utilitza la fórmula del cosinus de l'angle doble tot expressant-la en funció del $\cos \alpha$.

18 Tenint en compte que $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha)$, prova que $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

19 Simplifica les expressions següents:

a) $2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha$

b) $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha$

20 Prova que $\frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

 Desenvolupa el primer membre i divideix el numerador i el denominador per $2 \sin \alpha \cos \alpha$.

1.13 EQUACIONS TRIGONOMÈTRIQUES

- Equacions trigonomètriques són aquelles en què la incògnita és un angle que apareix en una o diverses raons trigonomètriques.
- Les fórmules trigonomètriques ens permeten expressar l'angle amb només una raó, i aïllar-la.
- S'han de comprovar les solucions obtingudes a l'equació inicial, ja que és freqüent que apareguin solucions estranyes.

EXERCICI RESOLT

Resol l'equació: $2 \sin x = \operatorname{tg} 2x$.

RESOLUCIÓ

- Fem $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ i substituïm a l'equació donada:

$$2 \sin x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \rightarrow 2 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \sin x \cos x$$

- Ho passem tot al primer membre i traiem factor comú:

$$2 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x) = 0$$

$$2 \sin^2 x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x \rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k \\ \cos x = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Comprovem les solucions:

$$x = 0: 2 \sin 0^\circ = \operatorname{tg} 2 \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$x = 120: 2 \sin 120^\circ = \operatorname{tg} 240^\circ \Rightarrow 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$x = 240: 2 \sin 240^\circ = \operatorname{tg} 480^\circ = \operatorname{tg} 120^\circ \Rightarrow 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3}$$

Totes són vàlides.

1 Resol l'equació $2 + \cos^2 x = -2 \sin x$.

2 Resol l'equació $\cos x = \sqrt{3} (1 - \sin x)$.

 Eleva al quadrat els dos membres i comprova les solucions.

3 Resol $4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$.

- 4 Resol l'equació $4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.
 *Divideix per $\cos^2 x$ i obtindràs una equació amb $\operatorname{tg} x$.*

- 5 Resol $\sin x + \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

- 6 Resol $\sin^2 x = 1 - \cos^2 \frac{x}{2}$.

EXERCICI RESOLT

Resol l'equació: $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$

RESOLUCIÓ

Transformem en producte: $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$

Substituïm a l'equació: $2 \sin 2x \cos x - \sin 2x = 0$

$$\sin 2x (2 \cos x - 1) = 0 \begin{cases} \sin 2x = 0 & \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 + 360^\circ k \\ 2x = 360 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} & \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

Comprovem les solucions:

- $\sin 0^\circ - \sin 0^\circ + \sin 0^\circ = 0$
- $\sin 180^\circ - \sin 360^\circ + \sin 540^\circ = 0$
- $\sin 60^\circ - \sin 120^\circ + \sin 180^\circ = 0$
- $\sin 300^\circ - \sin 600^\circ + \sin 900^\circ = 0$

- 7 Resol l'equació: $\sin 5x + \sin x = 0$

- 8 Resol les equacions següents i dóna la solució en radians:

a) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sqrt{2} \sin x = 0$

b) $\sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 1$

- 9 Resol: $\cos 3x - 2 \cos (\pi - x) = 0$

 *Expressa $\cos 3x$ en funció de $\sin x$ i $\cos x$ fent $\cos 3x = \cos (2x + x)$.*

EXERCICI RESOLT

Resol el sistema:
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

RESOLUCIÓ

Aïllem $\sin x$ a la primera equació i el substituïm a la segona:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \cos y \\ \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \cos y \right)^2 + \sin^2 y = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4-2\sqrt{3}}{4} + \cos^2 y - (\sqrt{3}-1) \cos y + 1 - \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \cos y \\ (\sqrt{3}-1) \cos y = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \begin{cases} y = 30^\circ \\ y = 330^\circ \end{cases}; \sin x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = 210^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases}$$

Solucions: $(210^\circ, 30^\circ)$, $(210^\circ, 330^\circ)$, $(330^\circ, 30^\circ)$ i $(330^\circ, 330^\circ)$

Comprovem les quatre solucions en el sistema inicial i concloem que són vàlides.

10 Resol el sistema
$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ 2 \cos x \cos y = 1 \end{cases}$$

11 Resol el sistema
$$\begin{cases} \sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

12 Resol el sistema
$$\begin{cases} \sin 3x + \sin y = \frac{3}{2} \\ \cos \frac{3x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Transforma en producte la suma de la primera equació i substitueix $\cos \frac{3x-y}{2}$ pel seu valor.

13 Resol els sistemes següents donant les solucions compreses entre 0° i 90° :

a)
$$\begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ x + y = 90 \end{cases}$$