

TEORIA D'ERRORS

INTRODUCCIÓ

Mesurar és determinar el valor d'una magnitud física per comparació amb un patró d'aquesta magnitud que per conveni s'estableix com a unitat de mesura

TIPUS D'ERRORS

Els errors es classifiquen en tres grups: de precisió, sistemàtics i accidentals.

Errors de precisió: els aparell de mesura tenen una escala i les divisions més petites d'aquesta escala determinen el valor més petit de la magnitud en qüestió que es pot apreciar o la resolució de l'equip. Per exemple un regle graduat en mm ens permet conèixer una longitud amb un error aproximat d'1 mm. Aquest tipus d'error s'anomena de precisió i està associat a la resolució de l'aparell.

Errors sistemàtics: normalment el seu origen està en una mala calibració, un mal funcionament de l'aparell o una utilització incorrecta dels aparells de mesura. Un exemple molt habitual d'error sistemàtic és l'error de paralatge (figura 2). Habitualment tenen l'efecte d'augmentar o disminuir sempre en la mateixa quantitat el valor d'una mesura.

Errors accidentals: s'anomenen també errors estadístics o aleatoris i són resultat de la contribució de moltes fonts que no es poden controlar i que modifiquen per damunt o per sota i de forma aleatòria el valor d'una mesura.

Figura 1: Errors accidentals i sistemàtics

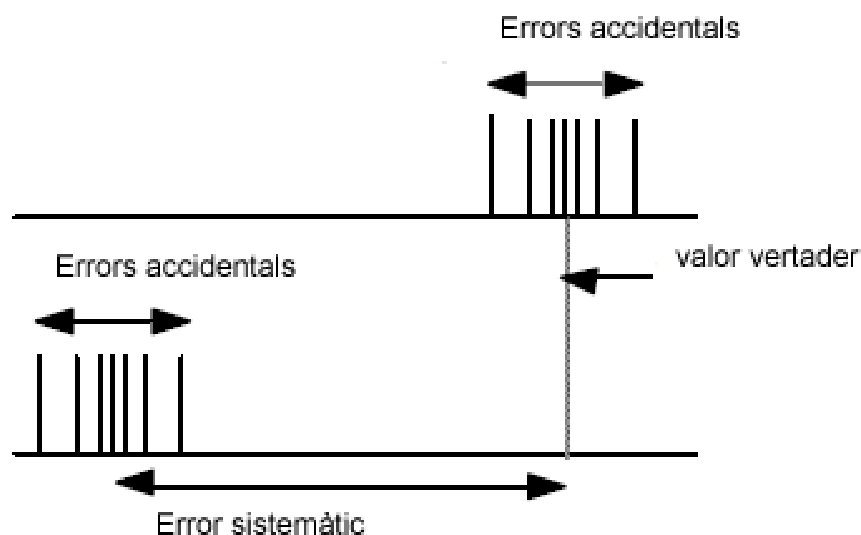
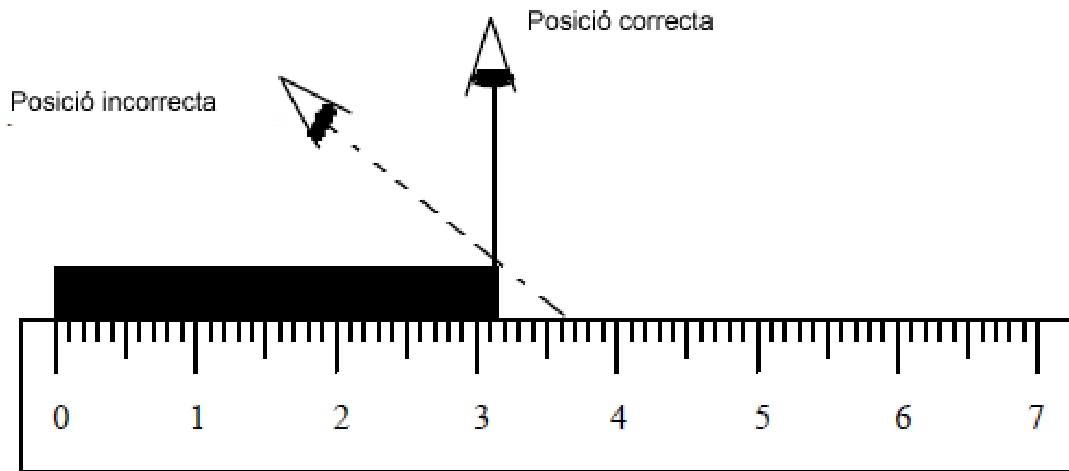


Figura 2: Error de paralatge



MESURES DIRECTES

Quan fem una única mesura d'una magnitud x el error ve donat per la precisió de l'aparell i prendrem $\Delta x = \varepsilon_p$, (ε_p és l'error de precisió de l'aparell). La mesura s'expressa de la forma:

$$x \pm \Delta x$$

Normalment per als aparells analògics com a error de precisió es pren la meitat de la divisió més petita; per als aparells digitals es pren la magnitud més petita que pot mesurar l'aparell.

Així per exemple per un regle dividit en mm l' $\varepsilon_p=0.5$ mm i per un cronòmetre digital que permet mesurar les dècimes de segon l' $\varepsilon_p=0.1$ s

En general portar a terme una única mesura no és un procediment fiable perquè molt factors poden determinar que una mesura sigui incorrecta; per exemple, un error al llegir l'escala de l'aparell. Per evitar-ho convé repetir les mesures uns quants cops. Aleshores com a millor aproximació al valor vertader d'una magnitud es prendrà la mitjana aritmètica.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

El error que es fa en prendre la mitjana aritmètica com a valor vertader s'anomena errors accidental. Si disposem d'un nombre de mesures $n \leq 4$ es pren la desviació mitjana:

$$\varepsilon_{acc} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

Quan $n \geq 5$ la desviació mitjana no és l'únic índex que permet valorar la dispersió de les mesures i es pot utilitzar desviació típica

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

En ocasions, per valors de n petits es pren una millor estimació per la desviació típica que ve donada per la expressió

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Les calculadores científiques normalment permeten calcular tant σ_n com σ_{n-1} . Les mesures que presenten desviacions superiors a $2\sigma_{n-1}$ es consideren sospitoses i les que presenten desviacions superiors a $3\sigma_{n-1}$ es poden descartar

Com a error accidental es pot prendre la desviació típica de la mitjana, que es representa per s i que es defineix

$$\varepsilon_{acc} = s(x) = \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Per estimar l'error final prendrem el més gran entre el error de precisió i l'error accidental

$$\Delta x = \max(\varepsilon_p, \varepsilon_{acc})$$

XIFRES SIGNIFICATIVES. REDONDEIG

La xifra més significativa d'un nombre és la primera xifra diferent de zero començant per l'esquerra. Les xifres significatives d'una magnitud estan determinades pels dígit mesurats amb certesa més la primera xifra estimada o dígit dubtós; dit d'una altra manera per la precisió. Així per exemple:

- La mesura 5.36 té tres xifres significatives
- La mesura 0.037 té dues xifres significatives
- La mesura 4.0 té dues xifres significatives
- La mesura 0.4 té una xifra significativa
- La mesura 4 km té una xifra significativa
- La mesura 4.00 s té tres xifres significatives

Quan hi ha dubtes pel que fa al nombre de xifres significatives d'una mesura convé expressar-la en notació científica

En principi quan fem l'estimació de l'error en una magnitud obtenim un nombre arbitrari de xifres. Això no té cap sentit i com a criteri general quan s'expressa l'error s'ha de mirar que només hi hagi una xifra diferent de zero. Utilitzarem els següents criteris per arrodonir el valor d'una mesura amb el seu error:

- El valor de la mesura i el error s'han d'expressar en les mateixes unitats
- En l'expressió de l'error només s'ha d'utilitzar una xifra diferent de zero. Per exemple un error de 0.345 s s'expressarà com 0.3 s i un error de 86 kg com 90 kg. S'ha de fer una excepció quan la xifra més significativa diferent de zero és 1 i la segona xifra és més petita o igual que 5, en aquest cas s'ha de mantenir la xifra que segueix a l'1 per expressar l'error. Per exemple 0.143 kg s'arrodoneix a 0.14.
- Si la primera xifra a suprimir és més gran que 5 la darrera xifra que es conserva ha d'augmentar-se en una unitat. Per exemple si volem arrodonir 0.861342 hem d'escriure 0.9 perquè la primera xifra que suprimim és 6 > 5.
- Si la primera xifra que s'ha de suprimir és més petita que 5 la darrera xifra conservada no canvia. Per exemple 234.38 s'arrodoneix a 200.
- Si la primera xifra que es suprimeix és igual a 5 es poden donar dos casos: si entre les següents xifres a suprimir n'hi alguna que és diferent de zero la darrera xifra conservada s'augmenta en una unitat. Per exemple arrodonirem 35.324 s com a 40 s. En el cas que totes les xifres a suprimir tret del 5 siguin zero la darrera xifra conservada no canvia. Per exemple 35.0000 N s'arrodonirà a 35.

Aquestes regles es poden aplicar tant a l'error com a la mesura i el valor de la mesura s'ha d'expressar amb la mateixa precisió que l'error.

PROPAGACIÓ DELS ERRORS

En moltes ocasions no resulta possible mesurar una variable i s'obté indirectament via la mesura d'altres variables. En aquest casos és determina l'error de la mesura indirecta a partir dels errors coneguts en les mesures directes.

Suma de magnituds afectades d'error

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Diferència de magnituds afectades d'error

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b) = (a - b) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Producte d'una magnitud afectada d'error per un nombre exacte

$$x \pm \Delta x = a(b \pm \Delta b) = ab \pm (a\Delta b)$$

Quocient d'una magnitud afectada d'error per un nombre exacte

$$x \pm \Delta x = \frac{1}{a}(b \pm \Delta b) = \frac{b}{a} \pm \left(\frac{\Delta b}{a}\right)$$

Producte de dues magnituds afectades d'error

Per multiplicar dos magnituds afectades d'error es multipliquen les magnituds i com a error relatiu es pren la suma d'error relatius

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Quocient de dues magnituds afectades d'error

Per multiplicar dos magnituds afectades d'error es divideixen les magnituds i com a error relatiu es pren la suma d'error relatius

$$x \pm \Delta x = \frac{(a \pm \Delta a)}{(b \pm \Delta b)}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Procediment estàndar

Un procediment molt conegut del càlcul d'errors de mesures indirectes consta de les següents etapes

- Escriure si resulta possible una expressió de la forma $x = Aa^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$
- Treure logaritmes neperians

$$\ln(x) = \ln(Aa^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}) = \ln(A) + \ln(a^{\alpha}) + \ln(b^{\beta}) + \ln(c^{\gamma}) =$$

$$\ln(x) = \ln(A) + \alpha\ln(a) + \beta\ln(b) + \gamma\ln(c)$$
- En cas d'haver signes negatius de diferències transformar-los en signes positius
- Calcular els diferencials de les expressions logarítmiques

$$\frac{dx}{x} = \frac{dA}{A} + \alpha \frac{da}{a} + \beta \frac{db}{b} + \gamma \frac{dc}{c}$$
- Substituir diferencials per increments $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha \frac{\Delta a}{a} + \beta \frac{\Delta b}{b} + \gamma \frac{\Delta c}{c}$

EXERCICIS

1. S'han portat a terme amb un regle graduat en mm 15 mesures de longitud d'una barra

L(mm)	L(mm)	L(mm)
15.0	14.0	13.5
15.5	15.5	15.5
13.5	15.0	14.0
14.0	14.0	15.5
13.0	14.0	14.0

Calculeu la millor aproximació al valor de L i estimeu l'error comès

2. Disposem d'un conjunt de molles del mateix tipus u mesurem com s'allarga una molla en funció de la càrrega que suporta. Després fem el mateix amb dues molles connectades en sèrie. Els resultats obtinguts són els següents

Càrrega(g)	Allargament amb 1 molla (mm)	Allargament amb 2 molles (mm)
50	30	62
100	60	125
150	90	180
200	120	240

- Representeu en una mateixa gràfica els dos conjunts de resultats
- Feu una estimació del valor de la constant d'elasticitat d'aquest tipus de molles
- Feu una estimació de l'error amb què es dona el valor de la constant d'elasticitat.
- Suposeu que amb el mateix tipus de molles les dades obtingudes són les següents. Què en deduiríeu?

Càrrega(g)	Allargament (mm)
50	92
100	185
150	280
200	362

3. Es deixa caure una pilota de squash des de 1 m d'altura i es mesura l'alçada del rebot. L'experiència es realitza havent escalfat la pilota a diferents temperatures i les dades obtingudes es recullen a continuació

Temperatura(°C)	Rebot (cm)
20	30
50	40
70	45
90	50

- Representeu les dades gràficament i intenteu establir una llei que relacioni l'alçada del rebot amb la temperatura.

- b) Es tracta d'un xoc elàstic o inelàstic? Per què?
- c) Calculeu quanta energia és perd a cada rebot i estimeu amb quin error podeu donar aquest valor

4. Arrodoniu els errors de les mesures que es reflecteixen a la següent taula i doneu les resultats finals.

mesura	error	Error arrodonit	Resultat final
0.987	0.018		
25.8251	0.068		
25.825	0.072		
0.88	0.66		
12	0.52		
1.867	0.942		
26.97	0.987		
356.257	11.897		
364	26		
588.6	340		
25.82	370.86		