

Selectivitat: Sistemes d'equacions

- [20] En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que el producte A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte.
- [21] Per la festa major, la pastisseria del poble elabora unes capsas de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb un llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capsas petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capsas de cada tipus han elaborat?
- [22] En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sortejos junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sortejos.
- [23] En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat va costar 19,50 €. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10 €. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.
- (a) Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total.
- (b) Si 1 refrec, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10 €, quant val el refrec, l'entrepà i la bola de gelat separadament?
- [24] Un inversor ha obtingut un benefici de 1.500 € després d'invertir un total de 40.000 € en tres empreses diferents. Aquests beneficis es desglossen de la manera següent: la quantitat invertida en l'empresa A li ha reportat un 2 % de beneficis, la quantitat invertida en l'empresa B, un 5 % i la quantitat invertida en l'empresa C, un 7 %. Els diners invertits en l'empresa B han estat els mateixos que en les altres dues empreses juntes. Quina va ser la quantitat invertida en cada una de les tres empreses?
- [25] Considereu el sistema d'equacions
$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}.$$
- Justifiqueu si les afirmacions següents són certes:
- (a) Aquest sistema d'equacions representa dues rectes paral·leles perquè totes dues tenen pendent -1.
- (b) Aquest sistema és compatible determinat i la solució és $x = 1, y = 1$.
- [26] Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona pila a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.
- (a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta.
- (b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes.
- [27] Un grup inversor vol invertir 6.000 en lletres, bons i accions que tenen un rendiment del 10 %, del 8 % i del 4 %, respectivament. Tenint en compte que vol obtenir una rendibilitat global del 7 %:
- (a) Trobeu la quantitat que ha d'invertir en lletres i en bons en funció de la quantitat invertida en accions. Quins valors pot prendre la quantitat invertida en accions sabent que les quantitats invertides en cadascun dels productes han de ser sempre més grans o iguals que zero?

- (b) Quant ha d'invertir en cadascuna de les tres opcions si vol invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts?

28 Una empresa ofereix 225 euros per repartir tot un paquet de fulls de propaganda. En Roc, en Martí i en Guiu decideixen fer la feina entre tots tres: en Martí reparteix un 20 % del total; en Guiu reparteix 100 fulls més que en Roc, i entre en Roc i en Martí en reparteixen 850.

- (a) Calculeu el nombre de fulls que ha repartit cadascun d'ells.
 (b) Un cop acabada la feina, decideixen dividir els guanys entre tots tres, proporcionalment als fulls repartits. Segons aquest criteri, quants diners cobrarà en Guiu, quants en cobrarà en Roc i quants en Martí?

29 La Maria té el doble de diners que en Pol i la Júlia junts. En Pol té la sisena part de diners que la Maria. La Júlia té el doble de diners que en Pol. La Maria té el triple de diners que la Júlia.

- (a) Amb aquestes dades, podem saber quants diners tenen cadascun d'ells? Trobeu el conjunt de solucions possibles.
 (b) Si en Pol té 35 €, quants diners tenen la Maria i la Júlia?

30 (a) La matriu ampliada d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Justifiqueu, sense resoldre, si el sistema és incompatible, compatible indeterminat o determinat.

- (b) Considereu ara la matriu d'un altre sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Justifiqueu si és incompatible o compatible i, en aquest darrer cas, resoleu-lo.

31 Sigui el sistema d'equacions
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

- (a) Justifiqueu si és compatible determinat.
 (b) Resoleu el sistema format per les dues primeres equacions.

32 La butlleta guanyadora d'una loteria està formada per tres nombres. Sabem que la suma del primer i el segon excedeix en dues unitats el tercer; que el primer nombre menys el doble del segon és deu unitats menor que el tercer, i que la suma dels tres nombres és 24. Quina és la butlleta guanyadora?

33 Dues famílies van a una cafeteria. La primera família pren 1 refresc, 3 cafès i 7 magdalenes, i paga un total d'11,75 €. La segona família demana 1 refresc, 4 cafès i 10 magdalenes i paga per tot plegat 15,5 €.

- (a) Digueu, raonadament, si és possible saber el preu d'un cafè, el d'un refresc i el d'una magdalena.
 (b) Calculeu quant ha de pagar una família que prengui un refresc, un cafè i una magdalena.

34 En resoldre un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites, x , y i z , hem trobat que les solucions compleixen les condicions següents:

- La suma de les solucions és 6.
- La segona és la mitjana aritmètica de les altres dues.
- El valor de la tercera és la suma dels valors de les altres dues.

Escriviu el sistema d'equacions que satisfà les condicions anteriors, resoleu-lo i indiqueu si és compatible determinat o indeterminat.

- 35 El mes de gener passat, en Joan, la Carla i la Laura van invertir en borsa. La Carla va invertir el doble que la Laura. Aquell mes, en Joan i la Carla van tenir uns guanys del 30 %, mentre que la Laura va tenir unes pèrdues del 10 %. De resultes d'això, van obtenir conjuntament uns guanys del 20 %. Van acordar tornar a invertir el febrer, incrementant cadascú un 10 % les seves inversions inicials. Si el mes de febrer van invertir entre tots tres 770 €, quina quantitat havia invertit cadascú el mes de gener?
- 36 Una persona decideix invertir un total de 60.000 €, repartits entre tres entitats d'estalvi diferents: A, B i C. Aquesta persona decideix que la quantitat invertida a l'entitat A sigui la meitat de la quantitat total invertida a les entitats B i C. A més, sabem que l'entitat A li ha assegurat una rendibilitat del 5 %; l'entitat B, una rendibilitat del 10 %, i l'entitat C, una rendibilitat del 2 %. Calculeu les quantitats invertides a cada entitat d'estalvi si sabem que aquest inversor obtindrà uns beneficis totals de 4.200 €.
- 37 En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat de diners que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
- Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells.
 - Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63 €, quant ha gastat cadascú?
- 38 Un botiguer vol determinar la quantitat de bitllets de 5 €, 10 € i 20 € que ha de tenir a la botiga per a atendre millor els clients. En total, vol tenir 1.375 € en 90 bitllets a la caixa. A més, s'ha adonat que li convé tenir el doble de bitllets de 20 € que de 5 € i 10 € junts. Quants bitllets haurà de tenir de cada classe?
- 39 Si un venedor d'articles de luxe fa un descompte del 20 % sobre el preu de venda d'un article, guanya 1.848 € sobre el preu de cost; si fa un descompte del 50 %, perd 420 €.
- Calculeu el preu de cost i el preu de venda de l'article.
 - Quin percentatge aplica sobre el preu de cost per calcular el preu de venda?
- 40 El propietari d'un bar ha comprat refrescos, cervesa i vi per un total de 5.000 €, sense impostos. El vi val 600 € menys que els refrescos i la cervesa plegats. Si tenim en compte que pels refrescos ha pagat un IVA del 6 %, per la cervesa un del 12 % i pel vi un del 30 %, aleshores la factura total, amb impostos inclosos, puja a 5.924 €. Calculeu quant ha pagat, sense IVA, per cada classe de beguda.
- 41 La Júlia, en Pol i la Maria han anat a comprar fruita. La Júlia ha comprat un kilogram de pomes, dos de préssecs i tres de taronges, i ha pagat 9 €. En Pol ha comprat dos kilograms de pomes i quatre de préssecs, i ha pagat 12 €. La Maria, en canvi, ha comprat quatre kilograms de pomes i dos de taronges, i ha pagat 8 €. Calculeu el preu del kilogram de cada fruita.
- 42 He anat a una botiga i he decidit comprar uns pantalons, una camisa i unes sabates. Si faig la compra avui, em costarà tot plegat 120 €. A més, actualment, la camisa i les sabates costen, plegades, el doble dels pantalons. Si m'espero una setmana, els pantalons i les sabates tindran un descompte del 20 %, mentre que la camisa només tindrà un descompte del 10 %. D'aquesta manera, pagaré 99 €. Quin és el preu inicial de cada article?
- 43 Una empresa cinematogràfica disposa de tres sales, A, B i C. Els preus d'entrada a aquestes sales són de 7 €, 8 € i 9 €, respectivament. Un dia determinat, la recaptació conjunta de les tres sales va ser de 1.520 €, i el nombre total d'espectadors va ser 200. Si s'haguessin intercanviat els espectadors de les sales A i B, la recaptació total s'hauria incrementat en 20 €. Calculeu el nombre d'espectadors que va acudir a cada una de les sales.
- 44 En Joan, en Pere i en Marc tenen, entre els tres, seixanta-tres anys. Si en Joan tingués tres anys menys, la seva edat seria el doble de les edats d'en Pere i en Marc junts. Si en Pere tingués un any més, la seva edat seria la meitat de la d'en Marc. Quina és l'edat actual de cadascun d'ells?
- 45 Una botiga ven llaunes de beguda a 0,6 € la llauna, però si comprem un paquet de sis llaunes ens cobren 3 €.
- Quin és el percentatge d'estalvi en comprar un paquet respecte a la compra de sis llaunes soltes?
 - En una setmana, la botiga ha venut 240 llaunes i ha ingressat 132,6 €. Quants paquets de sis llaunes ha venut?

- 46 Una empresa compra tres immobles per un valor total de 2 milions d'euros. En vendre'ls, espera obtenir uns guanys del 20 %, del 50 % i del 25 %, respectivament, que li reportaran uns beneficis totals de 600.000 €. En el moment de posar-los a la venda, però, aconsegueix uns guanys del 80 %, del 90 % i del 85 %, respectivament, cosa que li reporta uns beneficis totals d'1,7 milions d'euros. Quant havia pagat per cada immoble?

47 Considereu el sistema
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 4y - 5z = -8 \end{cases}.$$

- (a) Comproveu que té infinites solucions. Determineu-les.
(b) Determineu, si és possible, una solució en què la suma de les tres incògnites sigui 5.

- 48 Una botiga ha venut 225 llapis de memòria de tres models diferents, que anomenarem A, B i C, i ha ingressat un total de 10500 €. El llapis A costa 50 €, i els models B i C són, respectivament, un 10 % i un 40 % més barats que el model A. La suma total del llapis venuts dels models B i C és la meitat que la de llapis venuts del model A. Calculeu quants exemplars s'han venut de cada model.

- 49 Si sumem 2 unitats al denominador d'una fracció, la nova fracció val 1 unitat. En canvi, si sumem 3 unitats al numerador de la fracció original, la nova fracció val 2 unitats. Determineu la fracció original.

- 50 En una botiga de queviures hem comprat ampelles d'aigua a 0,5 € cadascuna, de llet a 1 € i de suc de fruita a 1,5 €. En arribar a la caixa ens adonem que portem 40 ampelles, el cost total de les quals és de 38 €. També observem que si les ampelles d'aigua que portem fossin de llet i les de llet fossin d'aigua, la compra ens sortiria 4 € més barata. Determineu el nombre d'ampelles de cada beguda que hem comprat.

51 Donat el sistema d'equacions següent:
$$\begin{cases} x + 5y + 2z = 2 \\ 2x + 4y + z = 4 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

- (a) Determineu-ne la solució general, en funció de z .
(b) Calculeu la solució particular segons la qual $z = 2$

- 52 Fa un any, una persona va invertir 12.000 € en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 25 %, les de l'empresa B han augmentat en un 10 % i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15 % del seu valor. Si ara vengués totes les accions, no obtindria ni pèrdues ni beneficis. Sabent que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes, calculeu la quantitat de diners que va invertir en accions de cada empresa.

- 53 Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ ax + 10y + 4z = 2 \end{cases}$$

- (a) Trobeu els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat.
(b) Trobeu el valor de a per al qual el valor de x és 2. Determineu també els valors de y i de z en aquest cas.

- 54 Un trajecte de 200 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5 €/km; el del ferrocarril, de 2 €/km, i el de l'autobús, de 3 €/km. El recorregut ens ha costat 500 €, per haver fet el doble de kilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determineu les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.

- 55 Una persona va invertir 6.000 € comprant accions de dues empreses, A i B. Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa A ha pujat un 5 % i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa B ha baixat un 10 %. Tot i això, si vengués ara les accions guanyaria 150 €. Determineu quants diners va invertir en accions de cada empresa.

- 56 Una companyia aèria de baix cost fa vols des de Girona a tres ciutats A, B i C. Calculeu el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: si ven 10 bitllets per anar a la ciutat A, 15 per a la B i cap per a la C, ingressa 925 €; si ven 12 bitllets per A, 8 per a B i cap per a C, ingressa 760 €; si ven 6 bitllets per a A, 5 per a B i 8 per a C, ingressa 855 €.

- 57 (a) Discuti el sistema següent segons els valors del paràmetre a :

$$\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases}$$

- (b) Resoleu-lo per al valor de a que el fa indeterminat.

- 58 Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ -3x + y - 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -12 \end{cases}$$

- 59 La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54.900 €. Hi ha tres categories de treballadors que indicarem A, B i C. El salari mensual d'un treballador de la categoria A és de 900 €, el d'un de la B és de 1.500 € i el d'un de la C és de 3.000 €. Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5 %. Per fer-ho ha rebaixat un 5% el salari de la categoria A, un 4% el de la B i un 7% el de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.

Solucions

- 20 133 han escollit el producte A, 266 el B i 101 el C.
- 21 Han elaborat 20 caixes grans, 50 de mitjanes i 140 de petites.
- 22 31 persones van encertar els 6 números del primer sorteig, 3 els del segon sorteig i 17 els del tercer.
- 23 (a) En total han pagat 30,90 €. (És molt important el raonament en aquest apartat).
(b) El refresc val 1,80 €, l'entrepà 2,10 € i una bola de gelat 1,20 €.
- 24 S'han invertit 18.000 € a l'empresa A, 20.000 € la B i 2.000 € la C.
- 25
- 26 (a)
(b) 7 monedes a la primera pila, 15 a la segona i 29 a la tercera.
- 27 (a) Si x , y i z són les quantitats invertides en lletres, bons i accions respectivament, aleshores $x = 2z - 3.000$ i $y = 9.000 - 3z$. En accions haurà d'invertir entre 1.500 i 3.000 euros.
(b) Ha d'invertir 3.000 euros en lletres i la mateixa quantitat en accions.
- 28 (a) En Roc ha repartit 550 fulls, en Martí 300 i en Guiu 650.
(b) En Roc cobrarà 82,50 €, en Martí 45 € i en Guiu 97,50 €.
- 29 (a) El sistema té infinites solucions (b) La Maria té 210 € i la Júlia 70
- 30 (a) El rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada és 3, per tant el sistema és compatible determinat.
(b) El rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada és 2, per tant el sistema és compatible indeterminat.
Solucions: $x = 2 - \lambda$, $y = 2\lambda - 1$ i $z = \lambda$.
- 31 (a)
(b) Solució: $x = \frac{\lambda + 6}{7}$, $y = \frac{8\lambda + 6}{7}$ i $z = \lambda$.

- 32 Els tres nombres són el 9, el 4 i l'11.
- 33 (a)
(b) Per un cafè, un refresc i una magdalena pagaran 4,25 €.
- 34 Sistema compatible determinat i la seva única solució és: $x = 1$, $y = 2$ i $z = 3$.
- 35 En Joan i la Laura han invertit 175 € cadascun d'ells i la Carla 350 €.
- 36 Inverteix 20.000 € a l'entitat, 30.000 € a l'entitat B i 10.000 € a l'entitat C.
- 37 (a)
(b) En Pol ha gastat 31,50 €, la Júlia 10,50 € i La Maria 21 €
- 38 25 bitllets de 5 €, 5 bitllets de 10 € i 60 bitllets de 20 €.
- 39 (a) El preu de cost és de 4.200 € i el de venda de 7.560 €.
(b) El venedor aplica un percentatge de benefici del 80 %.
- 40 Ha comprat 1.200 € en refrescos, 1.600 € en cervesa i 2.200 € en vi.
- 41 El preu d'un kilogram de pomes és de 1,50 €, el de préssecs, 2,25 € i el de taronges 1 €.
- 42 El preu inicial del pantaló era de 40 €, la camisa 30 € i les sabates 50 €.
- 43 100 entrades venudes a la sala A, 80 a la B i 20 a la C.
- 44 En Joan té 43 anys, en Pere 6 i en Marc 14.
- 45 (a) El 16,67 % d'estalvi. (b) 126 llaunes individuals i 19 paquets de 6 llaunes.
- 46 El primer i segon immoble han costat mig milió d'euros cadascun y el tercer un milió d'euros.
- 47 (a) $x = \frac{\lambda + 4}{3}$, $y = \frac{4\lambda - 5}{3}$, $z = \lambda$. (b) $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.
- 48 S'han venut 150 a preu normal, 50 amb un 10 % de descompte i 25 amb un 40 % de descompte.
- 49 La fracció val $\frac{7}{5}$.
- 50 12 ampolles d'aigua, 20 de llet i 8 de suc de fruita.
- 51 (a) $x = \frac{4+z}{2}$, $y = -\frac{z}{2}$ i $z = z$.
(b) $x = 3$, $y = -1$ i $z = 2$.
- 52 Inverteix 2.000 € en l'empresa A, 4.000 € en l'empresa B i 6.000 € en l'empresa C.
- 53 (a) $a = 7$ (b) $a = 1$, $y = -2$ i $z = 5$
- 54 Hem recorregut 50/3 km en taxi, 400/3 km en ferrocarril i 50 km en autobús.
- 55 Va invertir 5.000 euros en accions de tipus A i 1.000 euros en el tipus B.
- 56 El bitllet a la ciutat A val 40 euros, a la B 35 euros i a la C 55 euros.
- 57 (a) Si $a = -2$ el sistema és compatible indeterminat; si $a = 1$ el sistema és incompatible; en la resta de casos el sistema és compatible determinat.
(b) $x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$ amb $\lambda \in \mathbf{R}$.
- 58 $x = -2$, $y = 3$ i $z = 1$.
- 59 Hi ha 11 treballadors de categoria A, 20 de B i 5 de C.