

Selectivitat: Matrius

36 Resoleu les qüestions següents:

- (a) Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0$, en què I és la matriu indentitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la.
- (b) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A , és a dir, que compleixen que $A \cdot B = B \cdot A$.

37 En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdors $p1$, $p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- (a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.
- (b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per a tota la comanda? Quin és aquest preu?

38 Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d \ m \ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = (5 \ -5 \ 5).$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

- (a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem?
- (b) Si el vector codificat que ens ha arribat és $(2036 \ 1 \ -13)$, quina és la data sense codificar?

39 Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un nombre real.

- (a) Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.
- (b) Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M . És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

40 Resoleu les preguntes següents:

- (a) Trobeu les matrius A i B que compleixen que $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ i $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.
- (b) Determineu el valor de a , b , c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.

41 Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Record i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = (1 \ 1 \ 1).$$

- (a) Què representa la matriu $B \cdot A$? Calculeu-la.
 (b) Què representa la matriu $B \cdot A \cdot P$? Calculeu-la.

[42] Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$, en què m i n són dos nombres reals.

- (a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$.
 (b) Determineu m i n de manera que les matrius B i C commutin, és a dir, $B \cdot C = C \cdot B$.

[43] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

- (a) Comproveu que $A^3 - I = 0$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
 (b) Calculeu A^{11} utilitzant la informació de l'apartat a.

[44] Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$.
 (b) Per al valor $a = 2$, trobeu una matriu X tal que $A \cdot X \cdot A = B$.

[45] Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu les matrius $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
 (b) Justifiqueu si en algun cas és possible calcular P^2 quan P és una matriu no quadrada.

[46] Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu les matrius $A + B$ i $A \cdot B$.
 (b) Determineu els valors de a , b i c que compleixen que $A + B = A \cdot B$.

[47] Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu la matriu X que compleix $X \cdot A + B^2 = 2 \cdot I_2$, on $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 2.

[48] Trobeu les matrius A i B sabent que $A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ i que $2A + 3B = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$.

[49] Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2 - 6A + 5I = 0$ on 0 és la matriu en què tots els elements són 0.

[50] Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Determineu una matriu X que verifiqui $A \cdot X = I$.
 (b) Determineu una matriu Y que verifiqui $A \cdot Y \cdot A = B$.

[51] Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Resoleu l'equació matricial $X + 2A = X \cdot A$, on X és la matriu incògnita.
 (b) Hi ha cap matriu Y que verifiqui $Y \cdot A = B$? I que verifiqui $A \cdot Y = B$? Justifiqueu les respostes.

52 Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu A^2 , A^3 i A^4 .
- (b) Calculeu A^{201} i A^{344} .

53 Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que $A \cdot B = B \cdot A$.
- (b) Determineu el valor de a per al qual es verifica $A^2 = 2A$.

54 Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Determineu les matrius X i Y que compleixen que $X - 2Y = A$ i $2X - Y = B$.
- (b) Calculeu $(A + 2 \cdot Id)^2$, on Id és la matriu identitat.

55 Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifiqueu si és possible efectuar $A \cdot B$ o $B \cdot A$. En cas afirmatiu, calculeu-ho.
- (b) Calculeu B^2 i B^3 .

56 Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Trobeu una matriu X que compleixi que $A \cdot B + X = C$.
- (b) Calculeu C^3 .

57 Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Una matriu B , la primera fila de la qual és $(1, 0)$, té dues columnes i compleix que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Completeu-la.
- (b) Feu els càlculs pertinents per a comprovar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

58 Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu les matrius inverses de A i de B .
- (b) Determineu una matriu X de manera que $A \cdot X \cdot B = C$.

Solucions

15 (a) 1 (b) 1 (c) 2 (d) 1 (e) 1 (f) 3 (g) 2 (h) 3 (i) 4

16 (a) Si $a = 5$, el rang $M=2$; si $a \neq 5$ el rang $M=3$. (b) Si $a = 2$, el rang $N=2$; si $a \neq 2$ el rang $N=3$.

17 No existeix cap valor de k pel qual el rang d'aquesta matriu val 1.

18 (a) El rang $M=3$ per a tot valor de k real. (c) Si $k = -2$, el rang $P=1$; si $a \neq -2$ el rang $P=2$.
 (b) Si $k = -\frac{1}{2}$, el rang $N=2$; si $k \neq -\frac{1}{2}$ el rang $N=3$. (d) Si $k = 2$, el rang $Q=2$; si $k \neq 2$ el rang $Q=3$.

19

- (a) Rang 1 o 2 (b) Rang 1 o 2 (c) Rang 2

[20]
$$\begin{matrix} & A & B & C \\ x & \begin{pmatrix} -0,40 & -0,60 & -0,10 \end{pmatrix} \\ y & \begin{pmatrix} -0,70 & -0,20 & -0,30 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

[21] 45 del tipus A , 44 del tipus B i 58 del tipus C .

[22] (a)
$$\begin{matrix} & G & M & P \\ F_1 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ F_2 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ F_3 & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(b) La primera família 13 €, la segona 13,25 € i la tercera 12,75€.

[23] (a) Representa el que costa transportar als quatre països el producte A amb l'empresa E_1 .

(b) a_{23} .

(c) a_{12} i a_{22} .

[24] (a)
$$\begin{matrix} & dl & dm & dc & dj & dv \\ T & \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ M & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(b)
$$\begin{matrix} & dl & dm & dc & dj & dv \\ (74 & 98 & 74 & 98 & 74) \end{matrix}$$

(c)
$$\begin{matrix} & dl & dm & dc & dj & dv \\ T & \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ M & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ i } \begin{matrix} dl & dm & dc & dj & dv \\ (52,5 & 100,5 & 76,5 & 52,5 & 76,5) \end{matrix}$$

[25]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad G^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & 2 & 6 \\ -6 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad H^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = I \quad K^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[26] $(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$

[27] (a) 0 (b) 0 (c) -25 (d) 10

[28] (a) $a = 1$ (b) $a = 1$ o $a =$ -3 (c) Cap (d) $a = 0$ o $a =$ -3 o $a = 2$

[29] (a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[30] (a) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 6 & -7 \end{pmatrix}$

[31] $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [32] $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

[33] $X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

- [34] Si $a = -1$ el rang val 2; si $a = 1$ el rang val 1; si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ el rang val 3. Per a $a = 0$ la matriu inversa a la donada és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- [35] $|X| = 1$
- [36] (a) $a = -1$ i $b = -12$.
(b) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbf{R}$.
- [37] (a)
(b) El proveïdor p3 ens ofereix el millor preu. El preu és de 410 €.
- [38] (a) (2025 -4 3)
(b) 12 de juny de 2019
- [39] (a) $a = 1$ o $a = -1$
(b) $a = -1$
- [40] (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
(b) $a = -1$, $b = 4$, $c = 3$ i $d = 2$.
- [41] (a) (480 385)
(b) (6.259.650)
- [42] (a)
(b) $m = -1$ i $n = 1$.
- [43] (a)
(b) $A^{11} = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$
- [44] (a) $a = 1$
(b) $X = \begin{pmatrix} 1/2 & -5/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$
- [45] (a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ i $B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
(b)
- [46] (a) $A + B = \begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}$ (b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$ (c) $a = 1$, $b = 2$, $c = \frac{1}{2}$
- [47] $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 & -7 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$
[48] $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
- [49] $x = 5$ o $x = 1$
- [50] (a) $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
(b) $Y = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$
- [51] (a) $X = 2 \cdot A \cdot (A - I)^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
(b) Sí hi ha una matriu Y que verifica $Y \cdot A = B$, $Y = \begin{pmatrix} -7 & -12 \end{pmatrix}$. No hi ha cap matriu Y que verifica: $A \cdot Y = B$ (cal raonar-ho).
- [52] (a) $A^2 = -I$, $A^3 = -A$, $A^4 = I$
(b) $A^{201} = A$, $A^{344} = I$
- [53] (a) $a = 0$, $b = -4$
(b) $a = 0$
- [54] (a) $X = 2B - 3A = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 14 & -26 \end{pmatrix}$, $Y = B - 2A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$
(b) $(A + 2Id)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}$
- [55]

$$(a) \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -31 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{56} \quad (a) \quad X \text{ és la matriu nul·la.}$$

$$(b) \quad C^3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{57} \quad (a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -11/4 \\ 1 & 9/4 \end{pmatrix}$$

$$(b)$$

$$\boxed{58} \quad (a) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$