

Sistemes d'equacions: classificació i discussió

Com ja sabeu, estem treballant **sistemes d'equacions de 1r grau**, és a dir, **sistemes d'equacions lineals**, ja que si els representem gràficament (ho farem als últims temes d'aquest curs, a la part de geometria!) tenim objectes sense curvatura (rectes, plans, hiperplans). També vèrem veure que degut a aquesta linealitat (no curvatura), aquests sistemes només poden tenir una solució, infinites solucions o cap solució. Ara especificarem una mica més això i classifiquem i discutim els sistemes d'equacions lineals.

Definició: Anomenem **sistema compatible** al sistema d'equacions que té solució i **sistema incompatible** al que no té solució. Anomenem **sistema compatible determinat** al sistema d'equacions que té exactament una solució i **sistema compatible indeterminat** al sistema d'equacions que té infinites solucions.

Per tant classificar (o discutir, quan tinguem paràmetres) un sistema d'equacions és dir si és compatible determinat (una única solució), compatible indeterminat (infinites solucions) o incompatible (no té solució).

Ara ens podem fer la següent pregunta: podem classificar un sistema d'equacions sense trobar les seves solucions? Doncs sí, estudiant el rang de la matriu del sistema i el rang de la matriu ampliada (que ja sabeu fer). Quan tinguem els dos rangs aplicarem el **Teorema de Rouché-Fröbenius**, que veurem tot seguit, i tindrem el sistema classificat i sense necessitat de trobar les solucions.

Abans d'enunciar el teorema respondrem un parell de preguntes que ens ajudaran a entendre'l millor: `vspace=1em`

- **Quina relació hi ha entre el rang de la matriu del sistema i el nombre d'incògnites?** El rang de la matriu del sistema sempre és igual o inferior al nombre d'incògnites (si tenim n incògnites tenim com a molt n columnes i el rang serà igual o inferior a n).
- **Quina relació hi ha entre el rang de la matriu del sistema i el rang de la matriu ampliada del sistema?** El rang de la matriu ampliada sempre és igual o superior al rang de la matriu del sistema i si són diferents la diferència de rang és de 1 (l'única diferència és que l'ampliada té una columna més, per tant el rang es queda igual o augmenta només de un).

Ara ja podem enunciar el teorema de classificació dels sistemes lineals d'equacions:

Teorema de Rouché-Fröbenius: Donat un sistema lineal d'equacions:

- Si el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada del sistema, aleshores el sistema és **compatible** (té solució).
 - Si aquests dos rangs coincideixen amb el nombre d'incògnites, aleshores el sistema és **compatible determinat** (té una única solució).
 - Si aquests dos rangs no coincideixen amb el nombre d'incògnites, aleshores el sistema és **compatible indeterminat** (té infinites solucions).
- Si el rang de la matriu ampliada no és igual al rang de la matriu del sistema, aleshores el sistema és **incompatible** (no té solució).

Discussió de sistemes

Discutir un sistema vol dir bàsicament aplicar el Teorema de Rouché-Frobénius a un sistema d'equacions o a una família de sistemes d'equacions (és a dir a un sistema d'equacions on apareix un o més paràmetres).

No cal doncs que es expliqui res de nou de teoria, però us faré alguns recordatoris. A més, ja hem fet discussió de matrius amb paràmetres i ara el que hem de fer és discutir dues matrius en una (la del sistema i l'ampliada) amb paràmetres. O sigui, pràcticament el mateix.

Consells pels exercicis de Discussió de sistemes:

- Es tracta de trobar el rang de la matriu del sistema, el rang de la matriu ampliada i explicar què signifiquen aquests dos nombres segons el teorema de Rouché-Frobénius. La dificultat és que segons el valor del paràmetre pot passar una cosa o una altra (això és la discussió).
- Recordem que sempre, tinguem paràmetres o no, hem d'evitar agafat el pivot en l'última columna de la matriu ampliada del sistema i si l'agafem en aquesta columna ha de ser l'últim pivot que agafem.
- Agafar un pivot que contingui el paràmetre ens complicarà (molt) la vida (tot i ser correcte fer-ho). Per tant intentarem no agafar pivots amb paràmetres (lletres) fins al final de tot, sempre complint el punt anterior.
- També ens facilita la vida agafar pivots de columnes que no tenen paràmetres (encara que sovint no és possible).
- Quan ja no tinguem més remei que agafar un pivot amb paràmetres, aleshores haurem d'agafar diferents camins (igual que feiem amb la discussió del rang d'una matriu).

Sistema d'equacions homogenis: Un sistema d'equacions homogeni és aquell sistema en què tots els seus termes independents (els coeficients que no acompanyen a cap incògnita) valen 0.

Què tenen d'especial els sistemes d'equacions homogenis? Com l'última columna de la matriu del sistema està formada només per zeros, no podem agafar mai cap pivot a l'última columna. Per tant, el rang de la matriu del sistema i el rang de la matriu ampliada del sistema sempre són iguals. Conclusió: **els sistemes d'equacions homogenis sempre són compatibles** (sempre tenen solució).