

- 30 (a) La matriu ampliada d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Justifiqueu, sense resoldre'l, si el sistema és incompatible, compatible indeterminat o determinat.

- (b) Considereu ara la matriu d'un altre sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Justifiqueu si és incompatible o compatible i, en aquest darrer cas, resoleu-lo.

- a) Sense resoldre'l ni dir dismutiv-lo a partir dels rangs  
Observem que el sistema és triangular i que podem fer l'estudi dels rangs sense fer ni un pas.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 0 \\ \textcircled{5} & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Primer he agafat el 5 com a pivot i no he hagut de fer res ja que a la columna del pivot ja tinc zeros.

Després agafar el -1 com a pivot i, com ja tinc el 0 no he de fer res.  
I, per acabar, l'1.

Per tant  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = \# \text{incògnites} = 3 \Rightarrow$  el sistema és compatible determinat i té una única solució.

- b) Primer fem l'estudi dels rangs

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow [\text{full següent}]$$

$$I_3 \rightarrow I_2 + I_3$$

Ja es veu que tenim una informació repetida i que sobra, però acabem-lo.

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ t_3 \rightarrow t_3 - t_1 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ja no podem agafar més pivots

per tant:  $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b) = 2$   
 $\# \text{ incògnites} = 3$   $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Rang } A = \text{Rang}(A|b) = 2 \\ \# \text{ incògnites} = 3 \end{array}} \right\} \Rightarrow \text{el sistema és compatible} \\ \text{indeterminat} \\ (\text{té } \infty \text{ solucions})$

Anem a trobar les solucions:

2a equació:  $x + z = 2$

$$z = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x = 2 - \lambda$$

1a equació:  $2x + y = 3$

$$2(2 - \lambda) + y = 3$$

$$y = 3 - 2(2 - \lambda)$$

$$y = 3 - 4 + 2\lambda$$

$$y = 2\lambda - 1$$

Solucions:

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$