

20 Discuteix els següents sistemes d'equacions segons el valor del paràmetre:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} mx + (m+1)z = m \\ my + z = m \\ y + mz = m \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases} & \text{(d)} \begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} & \text{(g)} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 4x - 3y = a \\ 2x + y = 5 \end{cases} \\ & & \text{(h)} \begin{cases} -3x + ay = 1 \\ 2x + y = 0 \\ ax - 2ay = -1 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{e)} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & m+1 & m \\ 0 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & m & m \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & m+1 & m \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m-m^2 \\ 0 & 1 & m & m \end{array} \right)$$

Entro la darrera columna
Impossible entrar una columna sense paràmetres.
tinc temptacions d'agafar el pivot a la 1a columna (té molts zeros!), però agafar un pivot que contingui paràmetres no és una bona idea. Agafaré un dels uns (i millor a la segona columna que té un 0).

Ara ja estic obligat a agafar un pivot amb paràmetres (i per tant bifurcar camins).
No tocar la darrera columna!

m = candidats

Intento agafar m com a pivot però he de bifurcar camins.

Si $m=0$ no el puc agafar com a pivot. Intentaré un altre. Ara bé, puc canviar $m=0$!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

I no podem agafar més pivots
En aquest cas
 $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b) = 2$
incògnites = 3
Sistema compatible indeterminat

Si $m \neq 0$ l'agafem com a pivot i seguim (per sort ja tenim els zeros)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & m+1 & m \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m-m^2 \\ 0 & 1 & m & m \end{array} \right)$$

Puc agafar-lo com a pivot?
Depèn... per tant dos camins més

[següent full]

Si $1-m^2=0$ (és a dir $m=1$ o $m=-1$)

no el puc agafar com a pivot
però puc substituir $1-m^2=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & m+1 & m \\ 0 & 0 & 0 & m-m^2 \\ 0 & 1 & m & m \end{array} \right)$$

Intento agafar aquest com a pivot, però no obliguen que estem en el cas

* Si $m=1$ no es pot agafar com a pivot, per tant

$\text{Rang } A = \text{Rang } (A|b) = 2$
 $\# \text{ incògnites} = 3 \quad \Rightarrow \text{ sistema compatible indeterminat}$

* Si $m=-1$ sí el podem agafar com a pivot i

$\text{Rang } A = 2$
 $\text{Rang } (A|b) = 3 \quad \Rightarrow \text{ sistema incompatible}$

Si $1-m^2 \neq 0$ (és a dir $m \neq 1$ i $m \neq -1$)

sí el puc agafar com a pivot (i ja no en podré agafar cap més)

Per tant $\text{Rang } (A) = \text{Rang } (A|b) = \# \text{ incògnites} = 3 \Rightarrow \text{ el sistema és compatible determinat.}$

Conclusió: Si $m=0$ o $m=1$ el sistema és compatible indeterminat

Si $m=-1$ el sistema és incompatible

Si $m \neq 0$ i $m \neq 1$ i $m \neq -1$ el sistema és compatible determinat