

Selectivitat: Derivada d'una funció

- 13 La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt $(-2, -6)$ i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.
- Calculeu el valor de a .
 - Calculeu el valor de b .
- 14 Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt.
- 15 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, en què a és un paràmetre real.
- Trobeu per a quins valors del paràmetre a la recta tangent a la funció f en $x = 1$ és paral·lela a la recta $y + 3x + 5 = 0$
 - Per al valor del paràmetre $a = 1$, trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció f .
- 16 Sigui $y = f(x)$ una paràbola que té el vèrtex en el punt $V = (0, -4)$ i talla l'eix de les abscisses en els punts $(-2, 0)$ i $(2, 0)$.
- Determineu-ne l'equació.
 - Sigui una funció g tal que $g'(x) = f(x)$. Estudieu el creixement de la funció g , determineu-ne les abscisses dels extrems relatius i classifiqueu-los.
- 17 D'una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = x^3 - 4x$.
- Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $y = f(x)$.
 - Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los.
- 18 Considereu la funció $f(x) = -x^2 + bx + c$, amb b i c nombres reals.
- Trobeu b i c de manera que la gràfica de la funció passi pel punt $(-1, 0)$ i tingui un extrem local en el punt d'abscissa $x = 3$. Raoneu de quin tipus d'extrem relatiu es tracta.
 - Per al cas $b = 3$ i $c = 2$, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica que és paral·lela a la recta $y = 5x - 2$.
- 19 Considerem una funció $f(x)$ tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^2 + bx - 3$, en què b és un paràmetre real.
- Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -3$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
 - Per a $b = -8$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $(0, 2)$.
- 20 Considereu la funció $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.
- Determineu els punts en què la funció f talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals on la funció f és positiva.
 - Determineu els punts en què la recta tangent a la gràfica de f és horitzontal.
- 21 Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu-ne i classifiqueu-ne els extrems relatius.
 - Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 1$.
- 22 Sigui la funció $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
- Estudieu en quins intervals f creix i en quins intervals decreix. Determineu i classifiqueu, si n'hi ha, els màxims i els mínims de f .

(b) Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 2$.

23 Sabem que la funció derivada f' d'una funció f , polinòmica de tercer grau, talla l'eix de les abscisses en els punts $x = -1$ i $x = 2$.

- (a) Justifiqueu si és possible que f' talli també l'eix d'abscisses en un punt diferent dels dos esmentats.
- (b) Si ens diuen que $f'(1) = 2$, indiqueu i classifiqueu els màxims i els mínims de la funció f .

24 Considereu la funció $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-x+2}$.

- (a) Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt de tall amb l'eix de les ordenades.
- (b) Determineu els punts de la corba en què la recta tangent és horitzontal.

25 La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = e^{-2x} \cdot (x - x^2)$.

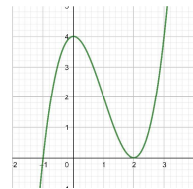
- (a) Estudieu el creixement i decreixement de la funció f .
- (b) Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.

26 La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = (x - 5) \cdot e^{-2x}$.

- (a) Si en té, determineu i classifiqueu els extrems de la funció f .
- (b) Sabem que la gràfica de f passa per $P(0, 2)$. Calculeu l'equació de la recta tangent a f en el punt P .

27 La gràfica adjunta mostra la funció f' , derivada d'una funció f .

- (a) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent. Si n'hi ha, classifiqueu els extrems de la funció f .
- (b) Indiqueu per a quins valors de x la recta tangent a f és horitzontal.



28 Determineu els valors de a , b i c que fan que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ passi pel punt $(0, 4)$ i tingui extrems relatius en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$. Classifiqueu aquests extrems.

29 La gràfica de la derivada f' de la funció f és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts $(5, 0)$ i $(1, 0)$, i té el vèrtex en el punt $(3, -4)$.

- (a) Expliqueu raonadament en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los.
- (b) Sabem que $f(3) = 2$. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt $(3, 2)$.

30 Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^x$.

- (a) Si la funció f té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los.
- (b) Calculeu la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 0$.

31 La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = e^{-x} \cdot (x - x^2)$.

- (a) Estudieu el creixement i decreixement de la funció f .
- (b) Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.

32 Donada una funció f , sabem que $f'(x) = e^{-x} \cdot (2x^2 - 3x)$.

- (a) Estudieu el creixement i decreixement de la funció f .
- (b) Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.

33 Donades les funcions $f(x) = x^3 + 5x^2 + (3 + k)x$ i $g(x) = x^2 + kx$.

- (a) Determineu les abscisses dels punts de tall de les dues corbes.
- (b) Determineu k perquè la paràbola donada per la funció g tingui el vèrtex en el punt d'abscissa $x = 2$, i determineu-ne l'ordenada.

34 Determineu els valors dels paràmetres a , b i c que fan que les corbes d'equació $f(x) = x^3 + ax + b$ i $g(x) = x^3 + cx^2 - 2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt $(1, 1)$.

- 35 Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determineu els valors dels tres paràmetres sabent que la gràfica de la funció passa pel punt $(1, 18)$ i que té extrems relatius per a $x = -2$ i $x = 4$.
- 36 Considerem la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$.
- Escriviu la fórmula de la funció que a cada nombre real, x , li fa correspondre el pendent de la recta tangent a f en el punt d'abscissa x .
 - Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = -1$.
- 37 Sigui f una funció polinòmica de grau 3, amb un màxim a $(0, 0)$ i un mínim a $(2, -4)$. Determineu la fórmula de la funció.
- 38 Considerem les funcions $f(x) = (x - a)^3$ i $g(x) = -x^2 + bx + c$. Determineu els valors dels paràmetres que fan que les dues corbes tinguin la mateixa tangent en el punt $(2, 1)$.
- 39 Considerem la funció $f(x) = \frac{12}{x}$.
- Indiqueu-ne el domini i estudeu-ne el creixement.
 - Calculeu les equacions de les rectes tangents a la gràfica de f que són paral·leles a la recta $y + 3x = 2$.
- 40 Considereu la funció $f(x) = x - e^{-3x}$.
- Indiqueu-ne el domini, i demostreu que f és estrictament creixent en tot el domini.
 - Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 0$.
- 41 Sabem que la funció $f(x) = ax^3 + 3x^2 - bx - \frac{1}{3}$ passa pel punt $(1, 0)$, i que la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt és paral·lela a la recta $12x - 2y = 3$.
- Determineu els valors dels paràmetres a i b .
 - Per a $a = 1$ i $b = 9$, determineu, si n'hi ha, les abscisses dels extrems possibles (màxims o mínims) de la funció, i classifiqueu-los.
- 42 Considereu la funció següent:
- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
- Determineu el valor de b perquè la funció f sigui contínua en el punt $x = 0$. Justifiqueu si f pot ser discontinua en algun altre punt.
 - Justifiqueu si, per a valors positius de x , la funció f és creixent o decreixent.
- 43 Considereu la funció $f(x) = x^3 - ax^2 + 9x + b$.
- Determineu a i b , sabent que la gràfica de f passa pel punt $(2, 2)$ i té un extrem en $x = 1$.
 - Per a $a = 6$ i $b = 0$, determineu els possibles màxims i mínims de f i classifiqueu-los.
- 44 Calculeu els paràmetres a , b i c de la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabent que la recta $5x - y - 2 = 0$ és tangent a la corba $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$ i que el valor mínim absolut que pren la funció és $-49/12$.
- 45 Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els màxims i els mínims, de la funció $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- 46 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$.
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
 - Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els extrems, si n'hi ha.

Solucions

- 13 (a) $a = 2$ (b) $b = 2$
- 14 $a = -6$. L'extrem relatiu és un màxim. $f(-1) = 4$.
- 15 (a) $a = 2$ o $a = 2/3$
 (b) En $x = 0$ hi ha un màxim relatiu i en $x = 2$ hi ha un mínim relatiu. La funció creix en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i decreix en $(0, 1) \cup (1, 2)$.
- 16 (a) $f(x) = x^2 - 4$
 (b) En $x = -2$ hi ha un màxim relatiu i en $x = 2$ hi ha un mínim relatiu. La funció creix en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ i decreix en $(-2, 2)$.
- 17 (a) f creix en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ i decreix en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
 (b) f té un màxim relatiu en $x = 0$ i dos mínims relatius en $x = 2$ i $x = -2$.
- 18 (a) $b = 6$ i $c = 7$. Es tracta d'un màxim relatiu. (b) $y = 5x + 3$.
- 19 (a) $b = 2$. En $x = -3$ hi ha un màxim relatiu. (b) $y = -3x + 2$
- 20 (a) Els punts de tall amb els eixos són $(0, \frac{1}{3})$ i $(-1, 0)$. f és positiva quan $x > -1$.
 (b) Els punts on la recta tangent és horitzontal són $(-3, -\frac{1}{6})$ i $(1, \frac{1}{2})$.
- 21 (a) f creix en $x < 0$ i decreix en $x > 0$. En $x = 0$ hi ha doncs un màxim relatiu.
 (b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
- 22 (a) f decreix en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ i creix en $(-1, 1)$. En $x = -1$ hi ha un mínim relatiu i en $x = 1$ hi ha un màxim relatiu.
 (b) $y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$.
- 23 (a)
 (b) En $x = -1$ hi ha un mínim relatiu i en $x = 2$ un màxim relatiu.
- 24 (a) $y = \frac{3}{2}x + 1$ (b) $(-3, -\frac{2}{7})$ i $(1, 2)$
- 25 (a) f és creixent en $(0, 1)$ i decreixent en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
 (b) Mínim relatiu en $x = 0$ i un màxim relatiu en $x = 1$
- 26 (a) Mínim relatiu en $x = 5$. (b) $y = -5x + 2$
- 27 (a) f creix en $(-1, +\infty)$ i decreix en $(-\infty, -1)$. En $x = -1$ hi ha un mínim relatiu.
 (b) $x = -1$ i $x = 2$.
- 28 $a = -6$, $b = 9$ i $c = 4$.
- 29 (a) f és creixent en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ i decreixent en $(1, 5)$. f té un màxim relatiu en $x = 1$ i un mínim relatiu en $x = 5$.
 (b) $y = -4x + 14$
- 30 (a) En $x = -1$ hi ha un mínim relatiu. (b) $y = x$
- 31 (a) f és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ i creixent en $(0, 1)$.
 (b) f té un màxim relatiu en $x = 1$ i un mínim relatiu en $x = 0$.
- 32 (a) f és creixent en $(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ i decreixent en $(0, \frac{3}{2})$.
 (b) f té un màxim relatiu en $x = 0$ i un mínim relatiu en $x = \frac{3}{2}$.

- 33 (a) $x = -3$, $x = -1$ i $x = 0$. (b) $k = -4$ i, quan $x = 2$, la seva ordenada val -4 .
- 34 $a = 4$, $b = -4$, $c = 2$. 35 $a = -3$, $b = -24$, $c = 44$.
- 36 (a) $g(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}$ (b) $y = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$
- 37 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 38 $a = 1$, $b = 7$ i $c = -9$.
- 39 (a) El domini de $f(x)$ és $\mathbb{R} - \{0\}$. La funció decreix en els intervals $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
(b) $y = -3x + 12$ i $y = -3x - 12$.
- 40 (a) El domini de $f(x)$ és $\mathbb{R}$. (b) $y = 4x - 1$.
- 41 (a) $a = \frac{4}{3}$ i $b = 4$.
(b) En $x = -3$ hi ha un màxim relatiu i en $x = 1$ hi ha un mínim relatiu.
- 42 (a) La funció només és contínua en $x = 0$ quan $b = 2$. En la resta de punts sempre és contínua.
(b)
- 43 (a) $a = \frac{21}{4}$ i $b = -3$.
(b) En $x = 1$ hi ha un màxim relatiu i en $x = 3$ hi ha un mínim relatiu.
- 44 $a = 3$, $b = 5$ i $c = -2$.
- 45 La funció és creixent en $(0, 2)$ i decreixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Té un mínim relatiu en $x = 0$ i un màxim relatiu en $x = 2$.
- 46 (a) $y = \frac{4}{9}(x + 1)$
(b) La funció és creixent en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ i decreixent en $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. Té un mínim relatiu en $x = 1$ i un màxim relatiu en $x = 0$.