

Selectivitat: Derivada d'una funció

- [20] La funció $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x , en què x és el dia del mes de febrer.

- (a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer?
- (b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitats se'n van vendre?

- [21] Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Sabem que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m - t)^2 + n,$$

per a $10 \leq t \leq 21$.

- (a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
- (b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.

- [22] Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

- (a) Justifiqueu que la funció és estrictament decreixent quan $x \geq 0$.
- (b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment.

- [23] Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:

- (a) Escriviu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte.
- (b) Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és màxim. Determineu quantes unitats vendrà.

- [24] Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.

- (a) Escriviu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet.
- (b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtindran amb aquest preu.

- [25] Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2}$, en què t mesura el temps en anys des del moment actual ($t = 0$).

- (a) Diguen quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini.
- (b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona?

- [26] Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

- (a) Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
- (b) Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(0, 3)$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt.
- 27 Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750 €. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 € que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 € de descompte sobre el preu inicial de 750 €, el compren 100 clients més.
- (a) Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és $I(p) = -10p^2 + 9.500p$.
- (b) Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims.
- 28 La despesa mensual en tabac d'un fumador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció $f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4}$, en què x representa el salari en milers d'euros i $f(x)$ la despesa mensual de tabac en euros.
- (a) Determineu el salari per al qual la despesa en tabac és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa?
- (b) Per a quins salaris la despesa mensual és inferior a 60 €?
- 29 Sabem que la funció $f(x) = \frac{ax + b}{cx + 1}$ passa pel punt $(2, -5)$ i que les rectes $x = 1$ i $y = 2$ en són les asímptotes vertical i horitzontal, respectivament. Calculeu a , b i c .
- 30 Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$.
- (a) Indiqueu-ne justificadament el domini i determineu els punts en què la gràfica de f talla l'eix d'abscisses.
- (b) Estudieu-ne el creixement i feu un esbós aproximat de la gràfica de la funció.
- 31 Des d'una barca es dispara una bengala de salvament marítim que s'apaga al cap de 4 minuts. En aquest interval de temps, es comprova que la intensitat lumínica de la bengala en funció del temps, mesurada en percentatges del 0 % al 100 %, queda perfectament descrita per l'expressió $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$, en què el temps t varia entre 0 i 4 minuts.
- (a) Calculeu per a quin valor de t el percentatge d'intensitat lumínica serà màxim.
- (b) Si des de la costa la bengala només és visible quan la seva intensitat lumínica és superior al 75 %, quin és l'interval de temps en què serà visible des de la costa i, per tant, serà més factible el salvament?
- 32 Un gimnàs cobra una quota de 42 euros mensuals i té 2.000 usuaris. Un estudi de mercat afirma que per cada euro que s'apuja (o s'abaixa) la quota es perden (o es guanyen) 20 usuaris.
- (a) Expressau el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota, tenint en compte que la relació entre les dues variables és lineal. Per a quin valor de la quota el gimnàs es quedaria sense usuaris?
- (b) Determineu en quin preu cal fixar la quota per a obtenir un benefici mensual màxim. Quin seria aquest benefici i quants usuaris tindria el gimnàs en aquest cas?
- 33 El vèrtex d'una paràbola és el punt $(1, 2)$.
- (a) Si la paràbola talla l'eix de les abscisses pel punt $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, quin serà l'altre punt de tall de la paràbola amb l'eix de les abscisses?
- (b) Trobeu l'equació de la paràbola.
- 34 Les pèrdues o els beneficis d'una empresa vénen donats per la funció $f(t) = \frac{3t - 6}{t + 2}$, en què $f(t)$ s'expressa en centenars de milers d'euros, un cop transcorreguts t anys des de l'inici del 2010.
- (a) Feu un esbós de la gràfica de la funció $f(t)$ per a $t > 0$, calculant els intervals de creixement, els talls amb els eixos i les asímptotes.

- (b) A l'inici de l'any 2010, quants euros perdia o guanyava l'empresa? Quins anys va tenir pèrdues l'empresa i a partir de quin any en va deixar de tenir?
- (c) A partir de quin any els guanys de l'empresa van ser més grans o iguals a un centenar de milers d'euros? Es poden superar els tres centenars de milers d'euros de beneficis? Raoneu les respostes.

35 El preu en euros d'una pedra preciosa és cinc vegades el quadrat del seu pes en grams. Si tenim una pedra preciosa de 8 grams i ens plantegem partir-la en dos trossos:

- (a) Quin pes ha de tenir cadascun dels trossos perquè el conjunt valgui el mínim possible?
- (b) Quin és el preu mínim i el preu màxim que pot valer aquest conjunt?

36 Una empresa ven un producte a un preu de p euros. El nombre d'unitats venudes depèn del preu que fixem segons la funció

$$V(p) = \frac{30p + 10}{p}.$$

- (a) Demostreu que, en augmentar els preus, les vendes disminueixen.
- (b) És possible que l'empresa vengui 20 unitats del producte? Si el preu augmenta indefinidament, què passarà amb les vendes?

37 Considereu la funció $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

- (a) Determineu els punts en què la funció f talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals on la funció f és positiva.
- (b) Determineu els punts en què la recta tangent a la gràfica de f és horitzontal.

38 Una fàbrica de mobles de cuina ven 1.000 unitats mensuals d'un model d'armari a 200 ? per unitat. Per tal de reduir-ne l'estoc, fa una oferta als compradors i estima que, per cada euro de reducció del preu, les vendes mensuals del producte s'incrementaran en 100 unitats.

- (a) Quantes unitats caldrà vendre per a obtenir el màxim d'ingressos mensuals?
- (b) A quant pujaran aquests ingressos?

39 Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- (a) Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu-ne i classifiqueu-ne els extrems relatius.
- (b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 1$.

40 Sigui la funció $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

- (a) Estudieu en quins intervals f creix i en quins intervals decreix. Determineu i classifiqueu, si n'hi ha, els màxims i mínims de f .
- (b) Escriuiu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 2$.

41 Sabem que la funció derivada f' d'una funció f , polinòmica de tercer grau, talla l'eix de les abscisses en els punts $x = -1$ i $x = 2$.

- (a) Justifiqueu si és possible que f' talli també l'eix d'abscisses en un punt diferent dels dos esmentats.
- (b) Si ens diuen que $f'(1) = 2$, indiqueu i classifiqueu els màxims i els mínims de la funció f .

42 Un arbre té un volum de 30 m^3 i, per la qualitat de la seva fusta, es ven a 50 € per metre cúbic. Cada any l'arbre augmenta el volum en 5 m^3 . Alhora, la qualitat de la fusta de l'arbre disminueix, i també el preu, que cada any és un euro per metre cúbic més barat. d'aquí a quants anys aconseguirem el màxim d'ingressos per la venda de la fusta de l'arbre? Quins seran aquests ingressos?

43 El preu, expressat en milers d'euros, del robí africà és el doble del quadrat del seu pes en grams, mentre que el preu del robí tailandès és quatre vegades el cub del seu pes en grams. Ens han enviat un paquet amb dos robins, un de cada classe, que en total pesen 2 grams.

- (a) Si els dos robins pesessin el mateix, quin preu hauríem de pagar?
- (b) Quant ha de pesar cada robí perquè el preu del paquet sigui mínim? Quin és aquest preu mínim?

44 Un hotel cobra 45 € per habitació i nit. Per aquest preu, té ocupades 165 habitacions cada nit. S'ha fet un estudi a partir del qual s'ha deduït que, per cada euro que s'apugi el preu de l'habitació, se n'ocuparà una menys cada nit.

(a) Si x és la quantitat que s'apuja el preu de l'habitació per sobre dels 45 € inicials, determineu la funció que dona els ingressos diaris de l'hotel segons el valor de x . Indiqueu també els ingressos màxims que pot obtenir l'hotel.

(b) Indiqueu entre quins preus obtindrà ingressos l'hotel.

45 Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17.00 h a les 21.00 h. El percentatge d'audiència P de la primera emissió en funció del temps t , mesurat en hores, és definit per la funció

$$P(t) = \frac{1}{5}(-t^3 + 49t^2 - 760t + 3690) \quad 17 \leq t \leq 21.$$

Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20 %.

(a) Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir.

(b) En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta.

46 Els beneficis, en centenars d'euros, d'un taller de bicicletes són definits per la funció $f(x) = -20x^2 + 50x - 20$, on x són els centenars de bicicletes venudes. El taller només té capacitat per a fabricar 200 bicicletes al dia.

(a) Calculeu el benefici màxim diari que pot obtenir el taller.

(b) Determineu el nombre mínim de bicicletes que ha de fabricar per a no tenir pèrdues.

47 Considereu la funció $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$.

(a) Indiqueu-ne el domini i els punts on la gràfica de la funció f talla l'eix d'abscisses.

(b) Determineu-ne, si en té, les asímptotes horitzontals i verticals.

48 S'han corregit unes quantes proves de selectivitat i s'han puntuat amb notes entre 0 i 10. El nombre de persones que han obtingut una determinada qualificació x és definit per la funció $N(x) = 250 - (2x - 9)^2$.

(a) Quantes persones han tret un 10 en aquesta prova? Quantes persones han tret un 6?

(b) Quina és la nota que han tret més persones? Quantes persones han tret aquesta nota?

49 Considereu la funció $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

(a) Determineu-ne, si en té, les asímptotes horitzontals i verticals.

(b) Justifiqueu que és decreixent en tot el domini de f .

50 La demanda d'energia elèctrica d'una ciutat, comptada a partir de la mitjanit i fins a les vuit del matí, és donada per la funció $f(t) = \frac{t^2 - 6t + 12}{6}$, on t s'expressa en hores (h) i $f(t)$, en milions de kilowats hora (kWh).

(a) A quina hora el consum coincideix amb el de la mitjanit, i quin és aquest consum?

(b) A quina hora es donarà el mínim consum? Justifiqueu que, efectivament, es tracta d'un mínim.

51 Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0,80 €/kg. Cada setmana que passa es produeix una pèrdua de 400 kg de fruita, però el benefici augmenta en un cèntim per cada kilogram.

(a) Quin benefici s'obté si es ven la fruita al cap de nou setmanes? Quin percentatge de fruita s'ha hagut de llençar?

(b) Quina setmana de venda serà la que obté un benefici màxim?

52 Segons un estudi de laboratori, l'evolució de la població en un cultiu de bacteris al llarg del temps segueix la funció $f(t) = 30 \cdot (1 - e^{-t}) + 10$, on t són els dies que han transcorregut des de l'inici de l'experiment, i $f(t)$ és la població, en milions de bacteris.

- (a) Quina població hi ha en el moment de començar l'experiment? Justifiqueu si en algun moment hi arribarà a haver 40 milions de bacteris.
- (b) Hi haurà algun moment en què la població sigui màxima? Justifiqueu la resposta.

- 53 Un equip científic ha estudiat l'evolució de la població d'una petita illa de la Polinèsia. Com a conclusió, ha determinat que, per tal d'obtenir una bona estimació de la població, cal fer servir l'expressió

$$P(t) = 400 + 18t - 6t^{\frac{3}{2}},$$

on t indica els anys transcorreguts des del principi de l'estudi.

- (a) Determineu la població de l'illa quan va començar l'estudi, i al cap d'un any. Quina ha estat la taxa de creixement en aquest període?
- (b) Al cap de quants anys després del començament de l'experiment va deixar de créixer la població de l'illa? Quin va ser el nombre màxim d'habitants?

- 54 En un hort hi ha plantades 50 pomeres. Cada arbre produeix 800 pomes. Per cada arbre addicional que hi plantem, la producció de cada arbre es redueix en 10 pomes. Quants arbres més ens cal plantar per a obtenir la producció més alta possible? Quina és aquesta producció?

- 55 La població de bacteris en una mostra evoluciona segons la funció $f(t) = -t^2 + 4t + 12$, on t correspon al nombre de setmanes des de l'inici de l'experiment, i $f(t)$ és el nombre d'individus que formen la mostra, en milions d'unitats.

- (a) Quantes setmanes han de passar fins a la desaparició de la població?
- (b) Quin serà el nombre màxim d'individus de la mostra, i al cap de quantes setmanes s'aconseguirà?

- 56 Sobre la funció $f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$ disposem de les dades següents:
- les seves asímptotes verticals són $x = -3$ i $x = 1$;
 - La seva gràfica passa pel punt $(0, -4)$.

- (a) Determineu la fórmula de la funció i feu un dibuix aproximat de la gràfica corresponent.
- (b) En el cas $a = 1$, $b = -2$ i $c = -1$, determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció.

- 57 Un triangle té els vèrtexs $O(0, 0)$, $A(6, 0)$ i $B(0, 3)$.

- (a) Dibuixeu-lo i escriviu l'equació de la recta que conté el segment AB .
- (b) Considerem el punt P situat sobre el segment AB , i dibuixem el rectangle que té per diagonal OP i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de P que fan màxima l'àrea del rectangle.

- 58 Disposem de 48 cm^2 de material per a fabricar una capsa de base quadrada, sense tapa. Calculeu les dimensions de la capsa de volum més gran que podem construir en aquestes condicions. Quin serà el volum de la capsa?

- 59 Considereu la funció següent:

$$f(x) = \frac{2x^2}{ax + 1}$$

- (a) Determineu el valor de a que fa que la funció f tingui un extrem en el punt $x = 1$, i indiqueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
- (b) Per a $a = 3$, indiqueu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f .

- 60 Una empresa que fabrica bicicletes ven la totalitat de la producció. Anomenarem x el nombre de bicicletes que fabrica mensualment. Els costos mensuals de producció, en euros, segueixen la funció $C(x) = 180x + 12000$. La venda de les bicicletes li reporta uns ingressos que segueixen la funció $I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2$. Els beneficis de l'empresa són, lògicament, la diferència entre ingressos i costos.

- (a) En quin interval cal situar la producció per a no perdre diners?
- (b) Quantes bicicletes ha de produir mensualment l'empresa per a obtenir el benefici màxim? En aquest cas, quant guanya per cada bicicleta?

- [61] Un estudi de laboratori sobre la propagació d'una espècie de mosques mostra que, passades t setmanes, el nombre d'individus és $N(t)$ centenars de mosques, en què $N(t) = -(t - 2)^2 + 9$.
- (a) Quantes mosques formen la població al cap d'una setmana? Quantes setmanes han de transcórrer fins a la desaparició total de les mosques?
 - (b) Quina és la població màxima d'individus? Quantes setmanes han hagut de passar per a obtenir aquesta població màxima?

- [62] Determineu dos nombres enters positius que sumin 25, de manera que el doble del quadrat del primer sumat amb el triple del quadrat del segon doni el mínim valor possible.

- [63] Un bosc té una massa forestal de 40.000 m^3 de fusta. Es calcula que la pluja àcida i els incendis provoquen una disminució del 6 % anual de l'esmentada massa forestal, que es pot expressar en termes de la funció $F(t) = 40000 \cdot 0,94^t$, en què $F(t)$ és la massa forestal que queda passats t anys.

- (a) Justifiqueu que la funció F és estrictament decreixent.
- (b) D'aquí a quants anys la massa forestal s'haurà reduït a la meitat?

- [64] Considereu la funció següent:

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$$

- (a) Determineu-ne les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.
- (b) Si $f'(x) > 0$ en tot el domini de la funció f , calculeu els límits laterals quan x tendeix a -2 i feu un esbós de la gràfica de f .

- [65] En una empresa artesana que produeix cadires, la funció de costos en relació amb el nombre q de cadires produïdes és:

$$C(q) = \frac{q^3}{100} + 4q + 20$$

Si q és el nombre de cadires produïdes, el cost mitjà de cada cadira s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q) = \frac{C(q)}{q}$$

- (a) Calculeu el cost mitjà de cada cadira, si l'empresa produeix 5 cadires. I si en produeix 100?
- (b) Determineu quantes cadires cal produir perquè el cost mitjà sigui mínim, justifiqueu que es tracta efectivament d'un mínim i calculeu aquest cost mitjà.

- [66] Un fons d'inversió posa en marxa un producte financer que aporta un benefici de $R(x)$ euros en fer una inversió de x centenars d'euros, segons la funció $R(x) = -0,01x^2 + 4x + 20$.

- (a) Calculeu quina inversió produeix més beneficis.
- (b) Calculeu el tant per cent de benefici que s'obtindrà amb una inversió de 1.000 €, i el que s'obtindrà amb una de 10.000 €.

- [67] Donada la funció següent:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

- (a) Determineu-ne el domini i els valors de x per als quals el signe de la funció f és negatiu.
- (b) Determineu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f

- [68] Donada la funció següent:

$$f(x) = \frac{-4x^2}{x + 1}$$

- (a) Determineu-ne les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.
- (b) Trobeu els punts de la corba en què la recta tangent és paral·lela a la recta $y = -3x + 4$.

- [69] En una explotació ramadera es declara una epidèmia, i els veterinaris preveuen que la propagació d'aquesta seguirà la funció $f(x) = -2x^2 + 48x + 162$, en què x representa el nombre de setmanes que han transcorregut des del moment de la declaració de l'epidèmia, i $f(x)$ indica el nombre d'animals afectats.

- (a) Quants animals hi ha afectats en el moment de declarar-se l'epidèmia? Quantes setmanes durarà l'epidèmia fins al moment en què ja no quedi cap animal afectat?
- (b) Indiqueu quin serà el nombre màxim d'animals afectats, i en quina setmana es produirà.

70 Volem construir el marc d'una finestra rectangular de 100 dm^2 de superfície. El cost de cada decímetre de marc horitzontal és de 6 €, mentre que el de cada decímetre de marc vertical és de 24 €. Calculeu les dimensions de la finestra perquè el marc ens surti tan barat com sigui possible.

71 Considereu la funció següent:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

- (a) En quin punt de la corba la recta tangent a la gràfica de f és paral·lela a la recta $x + y = 5$?
- (b) Calculeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció, si n'hi ha, i feu un esbós de la gràfica de la funció f .

Solucions

20 (a) El 5 de febrer es van vendre aproximadament 1.000 unitats de perfum. Entre el 7 i el 9 de febrer l'increment de vendes és de 3.000 unitats de perfum.

(b) El dia que es van vendre més perfums va ser l'11 de febrer i se'n van vendre aproximadament 10.000 unitats.

21 (a) $m = 18$ (b) $n = 545$

22 (a)

(b) El pes inicial del pacient és de 85 kg i al cap de dos mesos pesaria 79,5 kg. A llarg termini el seu pes tendirà a 63 kg.

23 (a) $B(x) = -60x^2 + 600x + 12.000$

(b) El benefici màxim s'obté amb un preu de venda de 650 € i a aquest preu vendrà 45 unitats.

24 (a) $I(x) = -500x^2 + 8.000x + 40.000$

(b) Els ingressos màxims s'obtenen quan el preu del patinet és de 600 € i a aquest preu es vendran 120 patinets. Els ingressos totals que s'obtindran en aquest màxim són de 72.000 €.

25 (a) La població actual és de 7 milions d'habitants i a molt llarg termini serà d'1 milió.

(b) El nombre mínim d'habitants s'assolirà al cap de 14 anys, amb una població de 875.000 habitants. El nombre màxim d'habitants es produeix en el moment inicial de l'estudi amb 7 milions.

26 (a) $b = 6$ (b) $y = 4x + 3$

27 (a)

(b) Per a obtenir ingressos $0 < p < 950$ euros. Per a obtenir els ingressos mensuals més elevats $p = 475$ euros i els ingressos totals que s'obtindran són de 2.256.250 €.

28 (a) La despesa de tabac és màxima quan el salari és de 2.000 € i serà de 100 €.

(b) $x \in (0, 666.67) \cup (6.000, +\infty)$

29 $a = -2$, $b = 9$ i $c = -1$

30 (a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$ i els punts de tall són $(0, 0)$ i $(3, 0)$.

(b) f és creixent en tot el seu domini.

31 (a) Després de 2 minuts. (b) $1 < t < 3$

32 (a) $f(x) = 2840 - 20x$, on x és la quota del gimnàs. A partir de 142 euros de quota el gimnàs es podria quedar sense usuaris.

(b) Si la quota és de 71 euros s'obté un benefici màxim, que serà de 100.820 euros i el gimnàs tindrà 1.420 usuaris.

33

(a) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

(b) $f(x) = -\frac{2}{9}(4x^2 - 8x - 5)$

34 (a)

(b) A l'inici del 2010 l'empresa perdia 300.000 euros. A partir del 2012 l'empresa va començar a no tenir pèrdues, fins aleshores va tenir pèrdues.

(c) A partir del 2014. No és possible superar els tres centenars de milers d'euros de beneficis.

35 (a) Cada tros hauria de pesar 4 grams.

(b) El preu mínim que pot valer és de 160 euros i el màxim de 320.

36

37 (a) Punts de tall amb els eixos: $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ i $(-1, 0)$. La funció és positiva quan $x > -1$.

(b) Els punts on la recta tangent és horitzontal a f són: $\left(-3, -\frac{1}{6}\right)$ i $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

38 (a) Caldrà vendre 10.500 unitats.

(b) S'obtindran uns ingressos de 1.102.500 euros.

39 (a) f és creixent quan $x < 0$ i decreixent quan $x > 0$. En $x = 0$ hi ha un màxim relatiu.

(b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

40 (a) f decreix en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ i decreixent en $(-1, 1)$. La funció té un mínim relatiu en $x = -1$ i un màxim relatiu en $x = 1$.

(b) $y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$.

41 (a)

(b) Ha de tenir un mínim a $x = -1$ i un màxim a $x = 2$.

42 L'ingrés màxim s'aconseguirà al cap de 22 anys i aquest ingrés serà de 3.920 €.

43 (a) Hauríem de pagar 6.000 €.

(b) El robí tailandès hauria de pesar $\frac{2}{3}$ de gram i el robí africà $\frac{4}{3}$ de gram. En aquest cas el preu mínim seria de 4.740,74 €.

44 (a) $I(x) = (165 - x)(45 + x)$. El màxim que es pot ingressar són 11.025 €

(b) L'hotel obté ingressos quan el preu de l'habitació està comprès entre 0 i 210 €.

45 (a) Augmenta de les 17 a les 20 hores i disminueix de les 20 a les 21 hores.

(b) No, ja que mai supera el 18 % d'audiència.

46 (a) El benefici màxim que pot obtenir el taller és de 1.125 €.

(b) Cal fabricar 50 bicicletes al dia per tal de no tenir pèrdues

47 (a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$. Punts de tall amb l'eix d'abscisses: $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

(b) Asíptota vertical en $x = \frac{5}{2}$. Asíptota horitzontal en $y = \frac{3}{2}$.

48 (a) 129 persones han tret un 10 i 241 un 6.

(b) La nota que més han tret és un 4,5, i l'han tret 250 persones.

49 (a) Asíptotes verticals en $x = 1$ i en $x = -1$. Asíptota horitzontal en $y = 0$

(b)

50 (a) El consum coincideix a mitjanit i a les 6 del matí. Aquest consum és de 2 milions de kWh.

(b) El consum mínim es produeix a les 3 de la matinada.

- 51 (a) S'obté un benefici de 32.396 €. S'ha llençat un 9 % de la fruita.
(b) La desena setmana.
- 52 (a) Al començar l'experiment hi ha 10 milions de bacteris. La població mai arribarà a 40 milions de bacteris.
(b) Aquesta funció no té cap màxim.
- 53 (a) Quan va començar l'estudi la població era de 400 habitants i al cap d'un any de 412. La taxa de creixement durant el primer any és del 3 %.
(b) La població comença a decreixer a partir del quart any. El nombre màxim d'habitants va ser de 424.
- 54 Cal plantar 15 arbres més. La producció serà de 42.250 pomes.
- 55 (a) Han de passar 6 setmanes.
(b) El nombre màxim d'individus arribarà fins a 16 milions i tindrà lloc dues setmanes després de l'inici de la prova.
- 56 (a) $f(x) = \frac{12}{x^2 + 2x - 3}$ (b) Màxim relatiu en $x=1$.
- 57 (a) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (b) $(3, \frac{3}{2})$
- 58 El volum de la capsa serà de 32 cm^3 .
- 59 (a) $a = -2$. Es tracta d'un mínim.
(b) Asímtota vertical en $x = -\frac{1}{3}$. No té asímtotes horitzontals.
- 60 (a) $[40, 600]$
(b) Ha de produir 320 bicicletes i el benefici serà de 122,50 € per bicicleta.
- 61 (a) Al cap d'una setmana hi ha 800 mosques. Desapareixeran totalment al cap de 5 setmanes.
(b) La població màxima d'individus serà de 900 mosques i hauran de passar 2 setmanes.
- 62 Els dos nombres són el 15 i el 10.
- 63 (a) (b) Es reduirà a la meitat en 11,2 anys.
- 64 (a) Asímtota horitzontal en $y = 3$ i asímtota vertical en $x = -2$.
(b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$
- 65 (a) El cost mitjà és de 8,25 si es produeixen 5 cadires i de 104,2 si se'n produeixen 100.
(b) Cal produir 10 cadires perquè el cost mitjà sigui mínim i aquest cost mitjà serà de 7.
- 66 (a) El benefici màxim s'obté quan invertim 20.000 €.
(b) Amb una inversió de 1.000 € s'obté un benefici del 5,9 % i amb una inversió de 10.000 € el 3,2 %.
- 67 (a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. El signe de la funció f és negatiu per $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$
(b) Asímtota horitzontal en $y = 1$. Asímtotes verticals en $x = -1$ i $x = 1$.
- 68 (a) Asímtota vertical en $x = -1$. No té asímtota horitzontal.
(b) $(1, -2)$ i $(-3, 18)$
- 69 (a) En el moment de declarar-se l'epidèmia hi ha 162 animals afectats. L'epidèmia durarà 27 setmanes.
(b) El nombre màxim d'afectats serà de 450 i es produirà en la dotzena setmana.
- 70 El marc sortirà el més barat possible quan les dimensions de la finestra siguin de 20 dm horitzontals per 5 dm verticals.
- 71 (a) $(1, 0)$
(b) Asímtota horitzontal en $y = 1$ i asímtota vertical en $x = 0$.