

Vectors

Els vectors són els elements que formen els espais vectorials. Això que sembla una obvietat és més complex del que sembla (però no patiu, al batxillerat no ho serà massa). En primer lloc ens diu que hi ha una relació molt estreta entre un espai vectorial i els seus vectors, cada espai vectorial té uns certs vectors. Per exemple:

El curs anterior el nostre espai vectorial era $\mathbf{R}^2$, és a dir **vectors en el pla** i un vector $\vec{v}$ era un objecte del tipus $\vec{v} = (a, b)$, on a i b són les d'aquest vector.

Aquests curs el nostre espai vectorial serà $\mathbf{R}^3$, és a dir **vectors a l'espai** i un vector $\vec{v}$ és un objecte del tipus $\vec{v} = (a, b, c)$, on a , b i c són les d'aquest vector.

Ja veieu que no ha variat gaire d'un curs a un altre. Segur que, a més, sou capaços d'imaginar matemàticament com són els vectors de l'espai $\mathbf{R}^7$, encara que ningú és capaç de visualitzar un espai de més de tres dimensions. Crec que ja us heu adonat com, usant les matemàtiques, podem treballar amb els vectors de qualsevol espai $\mathbf{R}^n$.

Nota avançada: Hi ha altres espais vectorials que no siguin $\mathbf{R}^n$ i, per tant, altres tipus de vectors? Sí. Per exemple hi ha espais vectorials que els seus vectors $\vec{v}$ són... Integrals! o... Matrius! i moltes altres coses.

Des del punt de vista geomètric, a tot vector se li pot associar direcció, sentit i mòdul. A més els vectors poden ser lliures o tenir un punt d'aplicació (estar clavats en un punt). Tot això ja s'ha estudiat el curs anterior i es fa igual aquest.

Per exemple, el **mòdul** d'un vector a $\mathbf{R}^2$ (la seva longitud), fent ús del teorema de pitàgores, és:

$$|\vec{v}| = |(a, b)| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

De la mateixa manera, el mòdul d'un vector a l'espai, a $\mathbf{R}^3$ és:

$$|\vec{v}| = |(a, b, c)| = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

I segur que ja sabeu calcular el mòdul (la longitud) d'un vector en un espai de 7 dimensions, encara que ningú el pot visualitzar.

Operacions amb vectors

Ja sabem quines són les operacions que podem fer amb vectors al pla, a $\mathbf{R}^2$: la suma de vectors i el producte d'un escalar (un nombre real) per un vector. A $\mathbf{R}^3$ i a qualsevol espai vectorial segueixen sent les mateixes.

Especificant, donats $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (d, e, f)$ i dos vectors de $\mathbf{R}^3$ i $\lambda \in \mathbf{R}$ un escalar, les dues operacions que podem realitzar són:

- Suma de dos vectors: $\vec{u} + \vec{v} = (a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$
- Producte d'un vector per un escalar: $\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (a, b, c) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)$

Exercicis

- [1] Donats els vectors $\vec{u} = (2, -3, 1)$ i $\vec{v} = (4, 2, -1)$, calculeu les coordenades dels següents vectors:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$	(c) $3\vec{u} + 2\vec{v}$	(e) $2(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{v}$
(b) $\vec{u} - 2\vec{v}$	(d) $-2\vec{u} - \vec{v}$	(f) $\vec{u} - 3(\vec{v} - 2\vec{u})$
- [2] Trobeu dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ que verifiquin les dues condicions següents: $\vec{u} + \vec{v} = (-2, 2, 3)$ i $2\vec{u} - \vec{v} = (5, -2, 3)$.
- [3] Determineu el valor del paràmetre m per tal que el mòdul de $\vec{v} = (3, -4, m)$ sigui 13.
- [4] Determineu un vector de mòdul 9 i que tingui la mateixa direcció que $\vec{v} = (2, 5, -1)$, però sentit contrari.
- [5] Calculeu m i n perquè es verifiqui que $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$, si $\vec{a} = (2, 10, -4)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ i $\vec{c} = (11, 15, -2)$.
- [6] Trobeu un vector $\vec{t}$ que verifiqui que $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{t} - \vec{w}$, si $\vec{u} = (8, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -6)$ i $\vec{w} = (-6, 2, 4)$.
- [7] Donat el vector $\vec{v} = (0, 3, -4)$, trobeu tots els vectors unitaris (mòdul 1) que tenen la mateixa direcció que $\vec{v}$.
- [8] Donat un vector $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$, expliqueu com trobar tots els vectors unitaris de la mateixa direcció que $\vec{v}$.

Solucions

- [1] (a) $(6, -1, 0)$ (c) $(14, -5, 1)$ (e) $(8, -4, 1)$
 (b) $(-6, -7, 3)$ (d) $(-8, 4, -1)$ (f) $(-6, -15, 6)$
- [2] $\vec{u} = (1, 0, 2)$ i $\vec{v} = (-3, 2, 1)$
- [3] $m = \pm 12$
- [4] $\left(-\frac{3\sqrt{30}}{5}, -\frac{3\sqrt{30}}{2}, \frac{3\sqrt{30}}{10}\right)$
- [5] $m = 3$ i $n = -5$
- [6] $\vec{t} = (2, 0, 14)$
- [7] $(0, 3/5, -4/5)$ i $(0, -3/5, 4/5)$
- [8]