

Combinació lineal. Dependència i independència de vectors

Aquests conceptes són de vital importància per seguir endavant i sovint us costa una mica entendre'ls. Comencem amb una mica de motivació.

El problema que hem de resoldre és el següent: tenim un conjunt de vectors i volem construir un cert *objecte* que anomenem espai vectorial (aquest espai vectorial pot ser moltes coses però de moment no és rellevant). Aleshores sorgeixen dues preguntes:

- En tinc prou amb aquests vectors per a **generar** l'espai que vull o en necessito més?
- Dels vectors que tinc, no pot ser que me'n sobri algun per construir l'espai que vull? Si és així, potser hauria de *llençar* els que em sobren. Podem reformular aquesta pregunta en termes matemàtics: els vectors dels que dispojo són **independents** (no me'n sobra cap) o **dependents** (me'n sobren i estaria bé saber quins)?

A partir d'aquestes dues preguntes han sorgit els dos conceptes més importants d'un espai vectorial: **generar un espai** i ser **linealment independents**. Quan es donen aquestes dues condicions direm que els vectors que tenim formen **una base** de l'espai vectorial que volem estudiar.

En aquesta secció resoldrem doncs les següents preguntes:

- Són independents (o dependents) els meus vectors?
- Generen l'espai que vull?
- Formen base de l'espai que vull els meus vectors?

Per resoldre la primera pregunta necessitem un concepte previ: **la combinació lineal**. La combinació lineal és simplement combinar les dues operacions que tenen els vectors (suma de dos vectors i producte d'un escalar per un vector) i obtenir així un nou vector. És a dir:

Definió: Direm que un vector $\vec{v}$ és combinació lineal d'uns altres vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ si podem trobar uns escalars $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de manera que:

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

El que ens està dient aquest resultat és que $\vec{v}$ sobra, que $\vec{v}$ es pot obtenir a partir de tots els altres. I el *llençarem*.

I si anem una mica més enllà, quan pensem en el conjunt $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, com sabem que *almenys un d'aquests vectors ens sobra*, aleshores **els vectors d'aquest conjunt són dependents**. I el que voldrem fer és llençar els que ens sobren i quedar-nos amb un **conjunt de vectors que siguin independents**.

Us heu perdut des que he escrit la definició? No patiu, amb uns exemples i la pràctica ho acabareu entenent. I quan creieu que ho heu entès, torneu a llegir des de la definició anterior i veure que no era tan difícil.

Exemple: És el vector $\vec{v} = (-3, 4, 0)$ combinació lineal dels vectors $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$ i $\vec{v}_2 = (5, 0, -2)$?

Intentem trobar λ_1 i λ_2 de manera que compleixi:

$$(-3, 4, 0) = \lambda_1 \cdot (1, 2, -1) + \lambda_2 \cdot (5, 0, -2)$$

(compareu aquest resultat amb la definició de combinació lineal)

Es tracta de fer les operacions d'aquest resultat i usar els sistemes d'equacions per trobar les dues lambdes (feu els càlculs). Trobarem $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$. És a dir $\vec{v} = 2 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Així doncs, $\vec{v}$ és combinació lineal de $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. I, per tant els vectors $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ són dependents. En principi hauria de *llençar* el vector $\vec{v}$ (em sobra) i veure si els altres dos són independents o dependents (i si fos aquest darrer cas, llençar els que sobren).

Si no haguéssim trobat solució al sistema d'equacions, no hauriem trobat el valor de les lambdes, diríem que el vector $\vec{v}$ no és combinació lineal dels altres vectors i que per tant, els tres vectors $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ són independents.

Tot això és idèntic que el que vam fer el curs anterior. Però aquest curs hem vist una nova eina que ens serà molt útil per resoldre aquest tipus de qüestions: el mètode de Gauss per calcular el rang d'una matriu. Veiem-ho usant l'exemple anterior

Agafem els tres vectors de l'exemple i formem una matriu amb ells. Cada fila o cada columna (podem triar) serà un d'aquests vectors. Jo trio cada vector en una columna. Em quedarà una matriu així (és indiferent l'ordre, quin poso a cada columna):

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara aplicaré el mètode de Gauss i agafaré tots els pivots possibles (jo els agafaré a la primera i segona columna, els detalls els heu de fer vosaltres). Heu d'arribar a aquestes conclusions: la matriu té rang 2 i, per tant una columna de zeros (si ho heu fet amb els pivots que us he dit serà la tercera). Aquest resultat el podem interpretar en termes de vectors:

- El rang ens diu quants vectors independents hi ha. En aquest cas hi ha dos vectors independents (i per tant, els tres vectors són dependents).
- Quin vector sobra? Aquesta és una pregunta que no té una única solució però sí té una solució senzilla: el tercer vector, el vector (columna de la matriu) en què no hem pogut agafar pivot. Dit d'una altra manera: el tercer vector és combinació lineal dels altres dos.
- Quins vectors formen un conjunt de vectors independents? Aquí també podem tenir múltiples solucions però una de senzilla: els vectors en què hem agafat un pivot. En aquest cas els dos primers.
- Aquests tres vectors generen un espai. De quina dimensió serà aquest espai? Doncs de dimensió 2 (el rang de la matriu).

El darrer dels punts anteriors ens ha introduït en l'estudi de la segona pregunta d'aquest apartat: un cop sabem si són dependents o independents, quin espai generen aquests vectors?

Aquesta pregunta és la més complicada de respondre, però no patiu, al batxillerat la seva resposta serà molt limitada: si ens ha donat dimensió 1 (el rang!) genera una recta, dimensió 2 un pla i dimensió 3 l'espai. I perquè no passem de 3? Perquè els vectors amb els que treballem tenen 3 components i, per tant, és impossible aconseguir un rang superior a 3.

I per acabar, quan es donen les dues coses anteriors, és a dir, quan tenim un conjunt de vectors independents que generen un espai concret, diem que aquests vectors són **la base** d'un cert espai.

Exercicis

- 9 Expresseu el vector $\vec{x} = (6, -7, -8)$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u} = (3, -2, -1)$ i $\vec{v} = (0, 1, 2)$.
- 10 Expresseu el vector $\vec{x} = (7, -2, 0)$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u} = (1, 1, -2)$, $\vec{v} = (1, 0, 3)$ i $\vec{w} = (-2, 5, 0)$.
- 11 Demostreu que els vectors $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ i $\vec{w} = (5, -5, 5)$ són linealment dependents.
- 12 Demostreu que els vectors $\vec{u} = (-2, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, 3, 2)$ i $\vec{w} = (1, 4, -5)$ són linealment independents.
- 13 Trobeu el valor de m que fa que els següents vectors siguin linealment independents: $\vec{u} = (2, 1, -3)$, $\vec{v} = (2, m+3, -4)$ i $\vec{w} = (-2, 2, m-1)$.
- 14 Hi ha algun valor de m pe al qual els vectors $\vec{u} = (3, m, -2m)$, $\vec{v} = (6, 2m-1, 0)$ i $\vec{w} = (6, 2m, 2)$ siguin linealment dependents?
- 15 Hi ha algun valor de m pe al qual els vectors $\vec{u} = (1, m-1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ i $\vec{w} = (-1, 2, m-1)$ siguin linealment dependents?
- 16 Donats els vectors $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ i $\vec{w} = (1, -a, 1)$, determineu per a quins valors del paràmetre a aquests tres vectors formen base de l'espai tridimensional.

Soluciones

$$\boxed{9} \quad \vec{x} = 2 \cdot \vec{u} - 3 \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{10} \quad \vec{x} = 3 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} - \vec{w}$$

11

12

- [13] Si $m \neq 1 + \sqrt{6}$ i $m \neq 1 - \sqrt{6}$ els tres vectors són linealment independents.
- [14] Sí, per a $m = -\frac{1}{2}$
- [15] No.
- [16] Els tres vectors formen base de l'espai tridimensional quan $a \neq 0$.