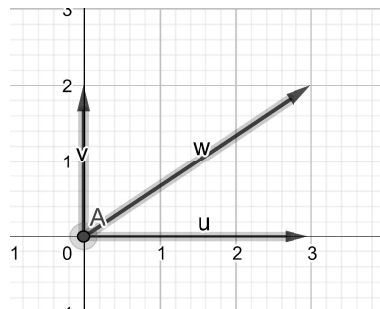
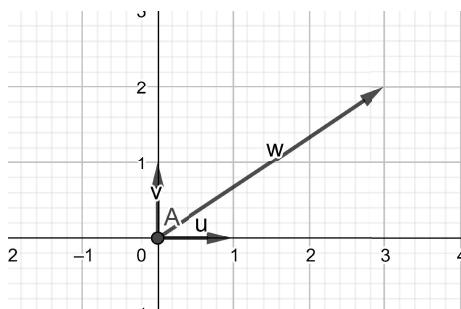


Bases

Motivació de les bases

En la secció anterior ja hem explicat que un conjunt de vectors formen una base d'un cert espai quan es compleixen dues coses: els vectors són linealment independents (no ens sobren vectors per generar l'espai) i generen l'espai (no ens falten vectors per generar l'espai). Ja veieu si són importants i com de bé s'ajusten als espais vectorials.

Qualsevol vector, encara que no ho sembli té una base amagada al darrera. Veiem-ho amb un exemple. Fixeu-vos en aquests dos gràfics:



Volem construir un vector $\vec{w}$. Si us fixeu $\vec{w}$ és idèntic en els dos gràfics. La diferència és que per construir-lo hem fet servir dos sistemes de referència diferents, dues bases diferents. La base que tenen al darrera és $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, diferent en cada gràfic.

Imaginem que li encarreguem la feina a dues persones diferents: El Joan ens dibuixarà la gràfica de l'esquerra i el Pere la de la dreta. Aquestes dues persones tenen una caixa amb dues eines $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, la base, diferent per cadascun d'ells. Però volen construir el mateix! Quines instruccions donarem a cadascú per construir $\vec{w}$?

- Joan: allarga el vector $\vec{u}$ 3 vegades, el vector $\vec{v}$ 2 vegades i suma'ls.
- Pere: allarga el vector $\vec{u}$ 1 vegada (és a dir, deixa'l igual), el vector $\vec{v}$ 1 vegada i suma'ls.

Doncs bé, matemàticament les instruccions haurien pogut ser aquestes:

- Joan: construeix el vector $\vec{w} = (3, 2)$ en la teva base. És a dir, amb les teves eines $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ fes $\vec{w} = 3 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$
- Pere: construeix el vector $\vec{w} = (1, 1)$ en la teva base. És a dir, amb les teves eines $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ fes $\vec{w} = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$.

I tots dos acaben dibuixant el mateix.

Notació i definicions

En les gràfiques anteriors el Joan ha fet servir la base $\vec{u} = (1, 0)$ i $\vec{v} = (0, 1)$. Aquesta és la base més senzilla que hi ha, els dos vectors són perpendiculars i unitaris (de longitud 1) i s'anomena base canònica. El nom més habitual no és $\vec{u}$ i $\vec{v}$ sinó $\vec{e}_1 = (1, 0)$ i $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

El Pere ha fet servir una base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ no canònica, però els dos vectors de la seva base segueixen sent ortogonals (perpendiculars), del contrari li hauríem complicat molt més la vida.

Aleshores les instruccions haurien pogut ser:

- Joan: $\vec{w} = (3, 2)_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = 3 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2$
- Pere: $\vec{w} = (1, 1)_{\vec{u}, \vec{v}} = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$.

Quan es tracta de la base canònica, al ser la més usada, no ens cal especificar la base (però no oblidem que està al darrera del vector): $\vec{w} = (3, 2)_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = (3, 2)$

No oblidem mai que els vectors que formen la base han de ser independents i generadors. I d'això se'n deduiria el següent resultat: per un espai de dimensió 2 (el pla, com en els exemples anteriors) necessitem una base formada per 2 vectors (independents i generadors) i, en general, per un espai de dimensió n necessitem una base formada per n vectors (independents i generadors).

Aplicació als exercicis d'aquest curs

Tot el que he explicat de bases ho vam veure el curs anterior. I aquest curs què ha canviat? Molt poc:

- Ara els vectors són de tres components.
- Treballem en un espai tridimensional $\mathbf{R}^3$ i, per tant, les bases estan formades per un màxim de tres vectors.
- La base canònica de l'espai $\mathbf{R}^3$ és: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ i $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Quina mena d'exercicis ens sortiran aquest curs? Decidir si formen base (apartat anterior) i canvis de base. Veiem-ne un exemple.

Exercici: Donat el vector $\vec{v} = (1, 5, -2)$, trobeu les coordenades de $\vec{v}$ en la base $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ i $\vec{u}_3 = (1, 0, 1)$.

Analitzem l'enunciat:

- Primer hauríem de veure que realment aquests tres vectors formen base (manera fàcil: els posem en una matriu i comprovem que el rang 3). O ens fiem de l'enunciat i tirem endavant (no aconsellable).
- El vector $\vec{v}$ és el mateix, no canvia. Canvia només la manera en què l'expliquem.
- Com en $\vec{v} = (1, 5, -2)$ no ens especifiquen la base, vol dir que està expressat en la base canònica.

I ara per fer el canvi de base fem servir una trivialitat:

$$\vec{v} = \vec{v}$$

Bé, de fet per ser més precisos, el de l'esquerra l'escriurem en base canònica i el de la dreta en la base de l'enunciat:

$$\vec{v}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} = \vec{v}_{1 \cdot \vec{e}_1 + 5 \cdot \vec{e}_2 - 2 \cdot \vec{e}_3}$$

$$(1, 5, -2)_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} = (x, y, z)_{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3}$$

Si trobem x, y, z ja tindrem el canvi de base fet. Traduïm el darrer resultat:

$$1 \cdot \vec{e}_1 + 5 \cdot \vec{e}_2 - 2 \cdot \vec{e}_3 = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$$

O el que és el mateix:

$$1 \cdot (1, 0, 0) + 5 \cdot (0, 1, 0) - 2 \cdot (0, 0, 1) = x \cdot (1, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 1) + z \cdot (1, 0, 1)$$

Si fem les operacions ens quedarà un sistema d'equacions que al resoldre'l trobare'm $\vec{v} = (4, 1, -3)_{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3}$

Nota: A la part esquerra de les desigualtats no calia fer res, donarà el resultat inicial $(1, 5, -2)$ ja que està en base canònica, però he volgut fer-ho amb més detall perquè ho pugueu aplicar a exercicis en què cap de les dues bases és la canònica.

Exercicis

- [17] Donats els següents conjunts formats per tres vectors, raoneu si formen base de l'espai ($\mathbf{R}^3$) i en cas negatiu, digueu quina dimensió té l'espai que generen:
- (a) $(5, 2, -1)$, $(4, 0, -2)$ i $(3, 4, 2)$
- (b) $(5, -2, 3)$, $(-2, 4, 2)$ i $(-1, 10, 9)$
- [18] Sigui la base $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ i $\vec{w} = (1, -2, 1)$.
- (a) Determineu les coordenades del vector $\vec{x} = (-1, 5, 0)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
- (b) Sigui el vector $\vec{y}$ que té per coordenades $(2, -1, 1)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Trobeu les coordenades de $\vec{y}$ en la base canònica.
- [19] Sigui $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de l'espai amb $\vec{u}_1 = (5, 3, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -3, -2)$ i $\vec{u}_3 = (1, 2, 1)$.
 Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de l'espai amb $\vec{v}_1 = (-2, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, 0)$ i $\vec{v}_3 = (-2, -3, 1)$.
 Donat el vector $\vec{x} = (1, 1, 1)$ expressat en les coordenades $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, trobeu les components de $\vec{x}$ en les coordenades $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.
- [20] Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ la base de l'exercici anterior. Si $\vec{v} = (1, -8, 5)$, es demana:
- (a) Trobeu el vector $\vec{v}$ en la base $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$.
- (b) Trobeu el vector $\vec{v}$ en la base $\{\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$.
- (c) Trobeu el vector $\vec{v}$ en la base $\{-\vec{v}_1, 2 \cdot \vec{v}_2, 5 \cdot \vec{v}_3\}$.

Solucions

- [17] (a) Sí formen base.
 (b) No formen base. Generen un espai de dimensió 2.
- [18] (a) $\vec{x} = (1, 0, -2)_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$ (b) $\vec{y} = (1, -1, 2)$
- [19] $\vec{x} = (-23/5, 11/5, 0)_{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3}$
- [20] (a) $(-8, 1, 5)$ (b) $(5, -8, 1)$ (c) $(-1, -4, 1)$