

18 Sigui la base $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ i $\vec{w} = (1, -2, 1)$.

- (a) Determineu les coordenades del vector $\vec{x} = (-1, 5, 0)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
- (b) Sigui el vector $\vec{y}$ que té per coordenades $(2, -1, 1)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Trobeu les coordenades de $\vec{y}$ en la base canònica.

Solució:

(a) Com no ens diuen res de les coordenades del vector $\vec{x}$ podem assumir que està escrit en la base canònica. Aquest vector sempre és el mateix vector, independentment de la base en el que està escrit (el vector no canvia, ho fa només *l'idioma* en el que està escrit), per tant:

$$\vec{x}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = \vec{x}_{\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}$$

$$(-1, 5, 0)_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = (a, b, c)_{\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}$$

Desenvolupem els dos costats de la igualtat. A l'esquerra no cal fer res perquè es tracta de la base canònica i hi ho fem tornarem al punt de partida.

$$(-1, 5, 0) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

$$(-1, 5, 0) = a \cdot (1, 1, 2) + b \cdot (2, 1, 3) + c \cdot (1, -2, 1)$$

$$(-1, 5, 0) = (a + 2b + c, a + b - 2c, 2a + 3b + c)$$

Ara passem de vectors a sistema d'equacions:

$$\begin{cases} -1 = a + 2b + c \\ 5 = a + b - 2c \\ 0 = 2a + 3b + c \end{cases}$$

Només ens falta resoldre el sistema d'equacions, usant Gauss, per exemple, i ja tindrem la solució.

(b) És fa igual que l'apartat anterior, però ara és molt més fàcil:

$$\vec{y}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = \vec{y}_{\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}$$

$$(a, b, c)_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = (2, -1, 1)_{\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}$$

Intenteu acabar-lo vosaltres, si no us surt m'ho dieu i l'acabo jo.