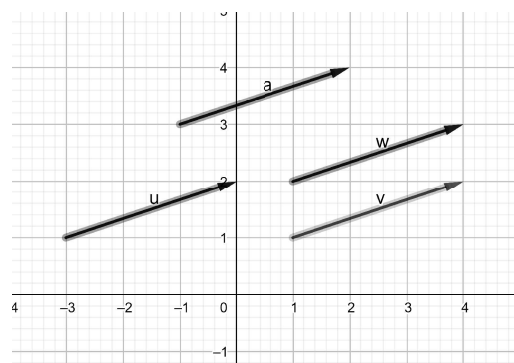


## Geometria dels vectors

Si mirem el gràfic de la dreta, veiem diversos vectors, oi? Doncs no, en principi tots són el mateix vector, són un únic vector, es diu que **els vectors són lliures**, es poden moure per qualsevol lloc (o podríem dir que infinits vectors estan representats per un únic vector). Tots els vectors que es poden representar per un de sol tenen la mateixa direcció, sentit i mòdul.

En aquest cas sempre és el  $(3, 1)$ . Però què passa si els vull diferenciar? Què passa si em vull referir al vector  $\vec{v}$ ? Doncs que l'he de fixar en el punt on comença (on té la cua de la fletxa), en aquest cas el punt  $(1, 1)$ .



L'exemple està fet amb vectors del pla, però podrien ser vectors de l'espai (vectors de tres components) o vector d'un espai  $n$ -dimensional (vectors de  $n$  components). Tots els raonaments seran idèntics, només que els càlculs més llargs.

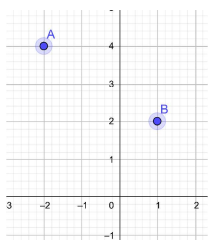
Recordem alguns conceptes bàsics:

- Si multipliquem un vector per un nombre positiu, el vector conserva la mateixa direcció i sentit, però ha canviat el seu mòdul. Si aquest nombre és més gran que 1, el vector és més llarg i si el nombre positiu és més petit que 1, el vector s'ha fet més curt.
- Si multipliquem un vector per un nombre negatiu, el vector conserva la mateixa direcció, però no el sentit, que ara és contrari, ni el mòdul. Igual que abans si aquest nombre és més gran o més petit que 1, el vector es farà més llarg o més curt respectivament.
- Un vector és sempre la diferència (resta) entre els seus dos extrems. És a dir,  $\vec{v} = \vec{PQ} = Q - P$ . Per exemple en la gràfica anterior  $\vec{v} = (4, 2) - (1, 1) = (3, 1)$ .

Aquest darrer punt és la clau per resoldre molts problemes geomètrics. Ens està dient que quan intentem resoldre un problema tenim dues vies per fer-lo (i en general una sol ser més senzilla que l'altra): usant dos punts o usant un vector.

Resoldre problemes amb vectors és molt més interessant que a partir de punts, però, per què us costa tant seguir aquesta via? Molt fàcil, fa molt poc temps que treballem amb vectors i molts anys, des de petits, a partir dels punts. Heu de començar a pensar d'una altra manera.

### Punt mig de dos punts donats



Volem calcular el punt mig de dos punts donats (en l'exemple de l'esquerra,  $A$  i  $B$ ). Un nen petit, que pensa a partir de punts, de seguida cercaria un regle, dibuixaria la línia que uneix els dos punts, calcularia la meitat... I a sobre el resultat només seria aproximat.

Nosaltres hem de pensar amb vectors (a mida que llegiu els passos aneu dibuixant el que es fa aquí a l'esquerra):

- Construïm el vector  $\vec{AB}$  (o el  $\vec{BA}$ , no importa). En l'exemple:  $\vec{AB} = (1, 2) - (-2, 4) = (3, -2)$ .
- Partim aquest vector per la meitat, ja que volem el punt mig:  $\frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$ . En l'exemple,  $\frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = (3/2, -1)$ .

- El problema és que aquest vector és lliure i nosaltres en volem un de molt concret, el que està fixat en el punt  $A$  (els vectors sempre estan fixats per la cua). Si li sumo al resultat anterior el punt  $A$ , el vector queda fixat i la punta de la fletxa que representa ens marcarà el punt mig que volem trobar:  $A + \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$ . En l'exemple:  $A + \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = (-2, 4) + (3/2, -1) = (-1/2, 3)$ . I ja tenim el punt mig.

Aquest és un exemple per veure com heu de pensar amb vectors: allargo o escurço el vector, li canvio el sentit, el fixo,...

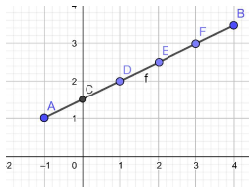
En aquest cas aquest problema es pot fer d'una manera més senzilla: el punt mig és la mitjana aritmètica dels dos punts. És a dir:

$$\frac{1}{2} \cdot ((-2, 4) + (1, 2)) = (-1/2, 3)$$

Però en altres problemes no serà així i és necessari que us aneu imaginant les diferents transformacions dels vectors. I aquestes transformacions funcionen igual per dues o tres dimensions, només en els càlculs tindrem vectors amb una component més.

### Dividir un segment en parts iguals

Volem dividir el segment  $AB$  (no és un vector, és un segment, veure gràfic) en, per exemple, cinc parts iguals. Quins passos seguirem? Una solució pot ser:



- Construïm el vector  $\vec{AB}$ .
- El dividim en cinc parts:  $\frac{1}{5} \cdot \vec{AB}$ .
- El fixem a  $A$  i obtenim  $C$ :  $C = A + \frac{1}{5} \cdot \vec{AB}$
- I si el fixem a  $C$  obtindrem  $D$ :  $D = C + \frac{1}{5} \cdot \vec{AB}$ . I així fins trobar tots els punts.

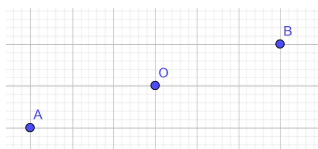
### Punts alineats

La millor manera de veure si uns punts estan alineats és restar els punts dos a dos i obtenir vectors. Si us feu un dibuix veure-ho que tots els vectors tenen la mateixa direcció. És a dir, que tots els vectors són dependents, que només hi ha un vector que importa.

Per exemple: ens donen tres punts  $A$ ,  $B$  i  $C$  i ens pregunten si estan alineats o formen un triangle. Construïm els vectors  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  (poden ser d'altres, per exemple  $\vec{AB}$  i  $\vec{BC}$ ; què és l'important? que entre tots els vectors surtin tots els punts que ens han donat).

Ara podem calcular el rang d'aquests dos vectors. Si el rang és 1 vol dir que els dos vectors són dependents, representen la mateixa direcció i, per tant, els tres punts estan alineats. Si el rang val 2 vol dir que els dos vectors són independents i els tres punts formen doncs un triangle.

### Punt simètric respecte d'un punt



El problema consisteix en què ens donen un punt  $A$  i volem trobar el simètric,  $B$  d'aquest punt respecte de  $O$  (veure el gràfic).  $O$  ens fa de mirall per trobar  $B$ .

Aquest cop no us explicaré els passos i els haureu de trobar vosaltres en un dels exercicis que proposaré.

## Exercicis

- 21 (a) Donats els punts  $A$  i  $O$ , expliqueu els passos per trobar el punt simètric de  $A$  respecte de  $O$ , d'una manera semblant com hem fet a la teoria d'aquest apartat. (Observeu que no cal especificar de quina dimensió són aquests punts, el raonament val per qualsevol dimensió)  
 (b) Trobeu el punt simètric de  $A(1, -2, 3)$  respecte de  $O(0, 2, -1)$
- 22 Donat el segment  $AB$ , determineu els punts que divideixen el segment en tres parts iguals, si  $A(-2, 3, -1)$  i  $B(9, -3, 0)$ .
- 23 Considereu els punts  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(0, -1, 5)$  i  $C(3, 5, a)$ . Determineu el valor de  $a$  perquè els punts  $A$ ,  $B$  i  $C$  estiguin alineats.
- 24 Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  que fan que els punts  $A(2, -1, a)$ ,  $B(5, 1, 6)$  i  $C(b, -5, 9)$  estiguin alineats.
- 25 Quina relació han de complir  $a$  i  $b$  perquè els tres vectors  $\vec{u} = (a, 2, b)$ ,  $\vec{v} = (3, a, 5)$  i  $\vec{w} = (1, -b, -1)$  siguin paral·lels?
- 26 Deduïu si hi ha algun valor del paràmetre  $m$  per al qual els vectors  $\vec{u} = (2 + m, 1, 2)$  i  $\vec{v} = (2, 1 + m, -4)$  siguin paral·lels.
- 27 Si unim els punts  $P(-1, 5, 0)$ ,  $Q(3, 2, -2)$  i  $R(0, -3, 4)$  obtenim tres segments que formen un triangle. Trobeu els punts mitjos dels costats d'aquest triangle.

## Solucions

- 21 (a) (b)  $(-1, 6, -5)$
- 22  $(5/3, 1, -2/3)$  i  $(16/3, -1, -1/3)$
- 23  $a = -1$
- 24  $a = 7$  i  $b = -4$
- 25 No existeix cap valor de  $a$  i  $b$  pel qual els tres vectors siguin paral·lels.
- 26  $m = -3$
- 27  $(1, 7/2, -1)$ ,  $(-1/2, 1, 2)$  i  $(3/2, -1/2, 1)$