

32 Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

en què k és un paràmetre real.

- (a) Discuti el sistema per als diferents valors de k .
(b) Resoleu el sistema per al cas $k = -2$.

El sistema en forma de matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ k+2 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array} \right) \rightarrow$$

Si agafem el -1 com a pivot ja
hinc un zero. Aprofitem-ho
Només hem de fer $f_3 \rightarrow f_3 + (k+1)f_1$

Dels 4 candidats a pivot que hi ha,
com vull entrar agafar k 's en el pivot,
el millor és aquest 2. No m'el
canviar. $f_3 \rightarrow 2f_3 - (k+2)f_2$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & (2-k)(k+2) & 2k^2-k-4 \end{array} \right) \rightarrow$$

Ara podem fer canvis però com hem
factoritzat també podem mirar
diferents casos (ho faig al darrer)

Es molt interessant tenir productes
ja que queden molt clares les solucions $k=2, k=-2$
Què he fet? Heu de calcular

Millor factoritzat, ja que ens permet
veure que $k=-2$ està en els
dos darrers llocs d'aquesta fila.

$2(k+2) - k(k+2)$ i he tret factor
comú. $(2-k)(k+2)$

Veig tres casos possibles tal i com ho hem esent:

$$k=2, k=-2, k \neq \pm 2$$

Cas $k=2$, la matriu queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

$$\text{Rang } A = 2$$

$$\text{Rang}(A|b) = 3$$

El sistema és incompatible. No té solució

Cas $k=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Rang } A = 2$$

$$\text{Rang}(A|b) = 2$$

$$\# \text{ incògnites} = 3$$

$\Rightarrow$ sistema compatible indeterminat, ∞ solucions.

Cas $k \neq \pm 2$

En aquest cas sí podem agafar el tercer pivot a la matriu del sistema. Llavors,

$$\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b) = \# \text{ incògnites} = 3$$

El sistema és compatible determinat, té una única solució.

b) Solucions cas $k=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 2x - 2z = 1 \\ \text{si } z = \lambda \end{array}$$

$$x = \frac{2\lambda + 1}{2}$$

Substituint a l'altra equació: $x - y + z = 0$

$$\frac{2\lambda + 1}{2} - y + \lambda = 0$$

$$y = \frac{2\lambda + 1}{2} + \lambda = \frac{4\lambda + 1}{2}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{2\lambda + 1}{2}, y = \frac{4\lambda + 1}{2}, z = \lambda \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}$$