

42 La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

- (a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?
 (b) Resoleu el sistema si $a = 2$.

Recordatori: ens diuen que el sistema és homogeni i, per tant, no es cal escriure la matriu ampliada del sistema (encara que ningú us ho impedeix) ja que la seva última columna està formada només per zeros i a cada pas que apliquem Gauss seguint quedant zeros.

I recordem que gràcies a que sempre tenim zeros no podem agafar un punt a l'última columna i el sistema sempre és compatible (determinat o indeterminat) i sempre té solució, com a mínim la solució $(0,0,0)$.

(a) Per tenir una única solució cal que $\text{rang } A = 3$. Veiem quan passa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 2a+11 & -4a-1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\begin{matrix} \text{f}_3 \rightarrow 3\text{f}_3 - (2a+2)\text{f}_1 \\ \text{f}_3 \rightarrow (a+7)\text{f}_2 - \text{f}_3 \end{matrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & -a^2-2a+8 & 0 \end{pmatrix}$$

↓
 aquest nombre el puc agafar com a punt si $-a^2-2a+8 \neq 0$.
 Vem a resoldre l'equació $a^2+2a-8=0$ (he canviat tots els signes, però més fàcil)

$$\boxed{\begin{matrix} a = -4 \\ a = 2 \end{matrix}}$$

En aquests casos el rang no serà 3

Si $a \neq -4$ i $a \neq 2$ el rang és 3 i el sistema té una única solució

I com el sistema és homogeni, aquesta única solució és $x=0, y=0, z=0$.
(No cal ni calcular-la, però ho poden fer si no estan segurs).

b) Resolen el sistema si $a=2$

Azafen la darrera matriu i substitueixen per aquest valor

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ja veiem que tindrà ∞ solucions (i una d'elles serà $x=0, y=0, z=0$, ja que és un sistema homogeni)

La 2a equació és $2x - y = 0$

$$\text{si } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

i substituïm a la 1a equació:

$$-x + 2y + 3z = 0$$

$$-\lambda + 4\lambda + 3z = 0$$

$$3\lambda + 3z = 0$$

$$\lambda + z = 0$$

$$\boxed{z = -\lambda}$$

Solució: $x = \lambda, y = 2\lambda, z = -\lambda$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$