

2.4 INTEGRACIÓ DE FUNCIONS RACIONALS

EXERCICI RESOLT

DENOMINADOR DE PRIMER GRAU

Resol aquestes integrals: a) $\int \frac{1}{3x+1} dx$ b) $\int \frac{x^2-2x}{x+3} dx$

RESOLUCIÓ

a) $\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + k$

b) Efectuem la divisió i expressem el resultat de la forma $\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$:

$$\int \frac{x^2-2x}{x+3} dx = \int \left(x-5 + \frac{15}{x+3} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 5x + 15 \ln|x+3| + k$$

1 Calcula aquestes integrals, dividint prèviament quan sigui necessari:

a) $\int \frac{2}{5x-1} dx$

b) $\int \frac{3x+1}{x-2} dx$

c) $\int \frac{x^2-3x+1}{x+1} dx$

d) $\int \frac{x^3+2x^2-x}{2x+1} dx$

EXERCICI RESOLT

EL DENOMINADOR NOMÉS TÉ ARRELS REALS SENZILLES

Calcula: $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-2x} dx = \int \frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} dx$

RESOLUCIÓ

Descomponem en fraccions simples:

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow 2x+1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Substituint } x=0 \rightarrow 1 = -2A \rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ \text{Substituint } x=-1 \rightarrow -1 = 3B \rightarrow B = -\frac{1}{3} \\ \text{Substituint } x=2 \rightarrow 5 = 6C \rightarrow C = \frac{5}{6} \end{array} \right\}$$

Per tant:

$$\int \frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{-1/2}{x} + \frac{-1/3}{x+1} + \frac{5/6}{x-2} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{5}{6} \ln|x-2| + k$$

2

Troba aquestes integrals, dividint prèviament quan sigui necessari i descomponent en fraccions simples:

a) $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$

b) $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$

c) $\int \frac{2x+1}{x^2-4} dx$

d) $\int \frac{x^2-1}{x^2-4} dx$

e) $\int \frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+x-6} dx$

f) $\int \frac{3x+1}{x(x-1)(x+2)} dx$

g) $\int \frac{x^4+2}{x^3-x} dx$

h) $\int \frac{1}{x^3+x^2-4x-4} dx$

EXERCICI RESOLT

EL DENOMINADOR TÉ ARRELS REALS MÚLTIPLES

Calcula: $\int \frac{-x^4-5x^3-x^2-3x-2}{x^5+x^4-x^3-x^2} dx = \int \frac{-x^4-5x^3-x^2-3x-2}{x^2(x-1)(x+1)^2} dx$

RESOLUCIÓ

En primer lloc, s'hauria de factoritzar el denominador; en aquest cas ja ho tenim fet. Després, descomponem en fraccions simples:

$$\frac{-x^4-5x^3-x^2-3x-2}{x^2(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$$

Fent càlculs en el segon membre i identificant numeradors (de manera anàloga a com ho hem fet en l'exercici resolt de la pàgina anterior), arribem a:

$$A = 1, B = 2, C = -3, D = 1, E = -2$$

Per tant, la integral queda:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{-3}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - 3 \ln|x-1| + \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + k$$

3 Calcula aquestes integrals, descomponent en fraccions simples:

a) $\int \frac{1}{(x-2)^4} dx$

b) $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$

c) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx$

d) $\int \frac{2x+1}{x^2(x-1)^2} dx$

e) $\int \frac{3x}{(x-1)^2(x-2)^2} dx$

f) $\int \frac{2}{x^4-3x^3+4x} dx$

EXERCICI RESOLT

EL DENOMINADOR ÉS UN POLINOMI DE SEGON GRAU SENSE ARRELS REALS

Calcula aquestes integrals, en què el denominador no té arrel real:

a) $\int \frac{5}{x^2+2x+3} dx$

b) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$

RESOLUCIÓ

a) Transformem el denominador per obtenir un binomi al quadrat i fem operacions fins a arribar a una integral relacionada amb l'arc tangent:

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x^2+2x+3} dx &= \int \frac{5}{(x^2+2x+1)+2} dx = \int \frac{5}{(x+1)^2+2} dx = \int \frac{5/2}{\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{2}{2}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{5\sqrt{2}}{2} \int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{5\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc tg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + k \end{aligned}$$

b) Quan el numerador és de primer grau, descomponem en un logaritme neperià i un arc tangent:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - \int \frac{1}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+5| - \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+5| - \operatorname{arc tg}(x+2) + k \end{aligned}$$

- 4 Resol les següents integrals en què el denominador és un polinomi de segon grau sense arrels reals (no oblidis dividir prèviament quan sigui necessari):

a) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

b) $\int \frac{3}{4x^2 + 4x + 2} dx$

c) $\int \frac{9}{x^2 - 6x + 10} dx$

d) $\int \frac{5}{4x^2 - 4x + 3} dx$

e) $\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx$

f) $\int \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 2} dx$

- 5 Calcula les integrals de funcions racionals següents:

a) $\int \frac{x + 2}{x - 2} dx$

b) $\int \frac{2x^2 - 3x + 2}{2x + 1} dx$

c) $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x}{x - 4} dx$

d) $\int \frac{1}{x(x + 1)} dx$

e) $\int \frac{x + 2}{x(x + 1)} dx$

f) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x + 1)} dx$

g) $\int \frac{4}{x^2 + x - 2} dx$

h) $\int \frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

i) $\int \frac{1}{x(x - 2)^2} dx$

j) $\int \frac{x + 1}{(x - 1)^2} dx$

k) $\int \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

l) $\int \frac{1}{1 + (3x - 2)^2} dx$

m) $\int \frac{2}{x^2 - 8x - 17} dx$

n) $\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 4} dx$

2.5 EXERCICIS DE RECAPITULACIÓ

Calcula les integrals següents:

1 a) $\int \left(\frac{-x^4}{5} + \frac{2x^3}{7} - \frac{3}{4} \right) dx$

b) $\int x^4 (2x + 1) dx$

2 a) $\int (x^2 + 1)^2 dx$

b) $\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt{3x}}{2x} dx$

3 a) $\int (2e^x - 3^x) dx$

b) $\int (\cos x - \operatorname{tg} x) dx$

4 a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

b) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$

5 a) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x + \sin x) dx$

b) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

6 a) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int \frac{x(3x^2-1)^6}{2} dx$

7 a) $\int 3x \sqrt[3]{x^2+1} dx$

b) $\int 3 \cos x \sin^5 x dx$

8 a) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} dx$

b) $\int \frac{2x}{5x^2-2} dx$

9 a) $\int \frac{e^x}{2e^x-1} dx$

b) $\int x e^{x^2-5} dx$

10 a) $\int x^2 \sin(4x^3-1) dx$

b) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

11 a) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

b) $\int x \cdot 5^{3x^2-1} dx$

12 a) $\int \frac{2 \cos x}{\sin^2 x} dx$

b) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

13 a) $\int 3 \ln x dx$

b) $\int \log_2 (x+1) dx$

14 a) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2} dx$

b) $\int (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x}) dx$

Troba les integrals següents

15 a) $\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} dx$
(Canvi: $t = \sqrt{x}$)

b) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$
(Canvi: $t = \sqrt{\cos x}$; utilitza la fórmula:
 $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x$)

16 a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(Canvi: $x = \sin t$; utilitza la fórmula
 $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}$)

b) $\int e^{2x} \sin e^x dx$
(Canvi: $t = e^x$)

17 a) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$
(Canvi: $t = \sqrt{2x+1}$)

b) $\int (2x^2 - 3) e^x dx$

18 a) $\int (3x - 1) \cos x dx$

b) $\int 4x^3 \ln x dx$

19 a) $\int e^{-x} \cos x dx$

b) $\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$

20 a) $\int \frac{5x-4}{x+1} dx$

b) $\int \frac{x^2 - 4x + 2}{x+2} dx$

21 a) $\int \frac{3x^3 - 2x^2}{x-1} dx$

b) $\int \frac{5x+2}{3x-1} dx$

22 a) $\int \frac{1}{x^2-9} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

23 a) $\int \frac{x}{(x-3)(x+1)} dx$

b) $\int \frac{2x+1}{x(x-2)} dx$

24 a) $\int \frac{2x-3}{x^3-4x} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2(x-5)} dx$

25 a) $\int \frac{2}{x^2+3} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2-10x+26} dx$

26 a) $\int \frac{1}{x^2-10x+27} dx$

b) $\int \frac{x-4}{x^2-10x+26} dx$