

3.1 CÀLCUL D'INTEGRALS DEFINIDES. REGLA DE BARROW

REGLA DE BARROW

Per calcular la integral $\int_a^b f(x) dx$:

- Busquem una primitiva, $G(x)$, de $f(x)$:

$$G(x) = \int f(x) dx$$

- Calculem $G(b)$ i $G(a)$.

- La integral que busquem és la diferència entre aquests dos valors:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[G(x) \right]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a)$$

EXERCICI RESOLT

Calcula: a) $\int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

RESOLUCIÓ

a) $\int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{x=-1}^{x=0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{11}{6}$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1 - 0 = 1$

1 Calcula:

a) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$

b) $\int_0^2 (x^3 - 2x + 3) dx$

c) $\int_0^1 2e^x dx$

d) $\int_1^e \frac{3}{x} dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

f) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

g) $\int_1^e \left(2x + \frac{1}{x} \right) dx$

h) $\int_1^2 \frac{2}{x^2} dx$

EXERCICI RESOLT

Troba el valor de $a > 0$ per al qual $\int_0^a (x+2)dx = \frac{21}{2}$.

RESOLUCIÓ

$$\int_0^a (x+2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^2}{2} + 2a = \frac{21}{2} \rightarrow a = 3$$

2 Calcula el valor de $a > 0$ per al qual $\int_0^a \sin x \, dx = \frac{1}{2}$.

3 Calcula el valor de a per al qual $\int_0^2 (ax^2 + 2) \, dx = 12$.

EXERCICI RESOLT

Calcula: $\int_{-3}^3 |x^2 - 4| \, dx$

RESOLUCIÓ

- Definim $f(x) = |x^2 - 4|$ com a funció "a trossos".

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Per tant:

$$\int_{-3}^3 |x^2 - 4| \, dx = \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) \, dx + \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) \, dx + \int_2^3 (x^2 - 4) \, dx = \frac{46}{3}$$

4 Calcula $\int_0^3 f(x) \, dx$, essent $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

5 Calcula:

a) $\int_{-3}^0 |x+2| \, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi/2} |\sin x| \, dx$

3.2 CÀLCUL D'ÀREES MITJANÇANT LES INTEGRALS: ÀREA SOTA UNA CORBA

Per calcular l'àrea compresa entre la corba $y = f(x)$, l'eix OX i les abscisses $x = a$ i $x = b$, convé fer els passos següents:

- Resolem l'equació $f(x) = 0$ per obtenir els punts de tall de la corba amb l'eix OX .
- Seleccionem, d'entre les arrels obtingudes, les que estiguin compreses entre a i b . Suposem que són, de menor a major, x_1 i x_2 ; és a dir:

$$a < x_1 < x_2 < b$$

- Trobem una primitiva de la funció: $G(x) = \int f(x) dx$
- L'àrea que busquem és la suma dels valors absoluts de les integrals en cada un dels recintes, és a dir:

$$\text{Àrea} = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^b f(x) dx \right|$$

EXERCICI RESOLT

Calcula l'àrea que hi ha entre la corba $y = x^3 - x^2 - 2x$ i les rectes $y = 0$ (eix X), $x = 0$ i $x = 2$.

Resolució

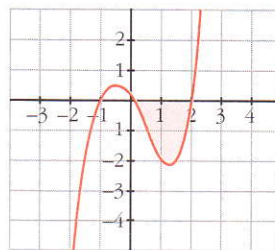
- Resolem l'equació $x^3 - x^2 - 2x = 0$:

$$x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x = -1, x = 0, x = 2$$

En l'interval $(0, 2)$ no hi ha arrels.

- Àrea = $\left| \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx \right| = \frac{8}{3} u^2$

- No és necessari dibuixar la gràfica, l'hem fet per visualitzar millor el resultat.



1

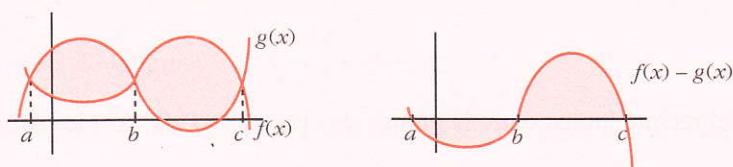
Troba l'àrea compresa entre la recta $y = 2x - 2$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

- 2 Troba l'àrea limitada entre la corba $y = x^3(x+2)$ i l'eix OX .
- 3 Troba l'àrea compresa entre la gràfica de la funció $y = \frac{6x}{x^2+1}$ i l'eix d'abscisses, per a $x \in [2, 5]$.
- 4 Troba l'àrea del recinte limitat entre la gràfica de $y = xe^{-x}$, l'eix X i les rectes $x = -1$ i $x = 0$.
- 5 Troba l'àrea compresa entre la corba $y = \cos^2 x$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$.
 $\bullet \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$
- 6 Troba l'àrea del recinte limitat entre la gràfica de f i les rectes $y = 0$ (eix X), $x = 1$ i $x = 2$, essent:
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$
- 7 Calcula el valor de $a > 0$, sabent que l'àrea que hi ha entre la corba $y = ax^2 + 2$, l'eix X i les rectes $x = -1$ i $x = 2$ és igual a 21.
- 8 Troba el valor de $a > 0$, sabent que la corba $y = a(-x^2 + 6x - 8)$ delimita amb l'eix d'abscisses un recinte de 12 unitats de superfície.

3.3 CÀLCUL DE L'ÀREA COMPRESA ENTRE DUES CORBES

- L'àrea compresa entre dues corbes, f i g , és igual a l'àrea compresa entre la funció diferència, $f - g$, i l'eix OX .
- Trobar els punts de tall de la funció diferència amb l'eix OX és el mateix que trobar els punts de tall de les gràfiques de f i de g , és a dir:

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$



EXERCICI RESOLT

Troba l'àrea del recinte limitat entre la paràbola $y = x^2 - 4x + 5$ i la recta $y = x + 1$.

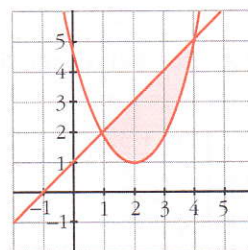
RESOLUCIÓ

- Trobem els punts de tall entre les dues funcions:

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = 1, x = 4$$

- L'àrea que es demana és:

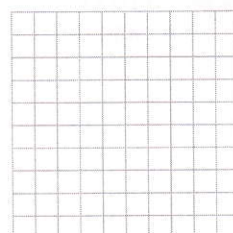
$$\begin{aligned} \left| \int_1^4 [(x+1) - (x^2 - 4x + 5)] dx \right| &= \left| \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx \right| = \\ &= \left| \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right) \right| = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



- No és necessari dibuixar la gràfica, l'hem representat per visualitzar millor el resultat.

1

Troba l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 4$.



2 Troba l'àrea del recinte limitat entre la paràbola $y = x^2 + 5$ i la recta $y = 9$.

3 Troba l'àrea del recinte limitat per les corbes $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ i la recta $x = 2$.

4 Troba l'àrea compresa entre les corbes $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ i $y = 2x$. Dibuixa el recinte.

5 Troba el valor de $m > 0$, sabent que l'àrea compresa entre $y = x^2$ i $y = mx$ és de 288 u^2 .

6 Troba l'àrea del recinte limitat per la recta tangent a $y = x^3 - 3x$ en $x = -1$ i la corba.

7 Troba l'àrea del recinte limitat per la corba $y = \frac{1}{x^2 + 3}$, la recta tangent a la corba en el punt d'inflexió de l'abscissa positiva i la recta $x = 0$.

8 Troba l'àrea del recinte limitat per $f(x)$ i les rectes $y = 8$, $x = 0$ i $x = 2$, essent:

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (f(x) \text{ és contínua en } \mathbb{R})$$