

3.4 VOLUM D'UN COS DE REVOLUCIÓ

El volum del cos que crea $y = f(x)$, amb $x \in [a, b]$, en girar al voltant de l'eix X ve donat per:

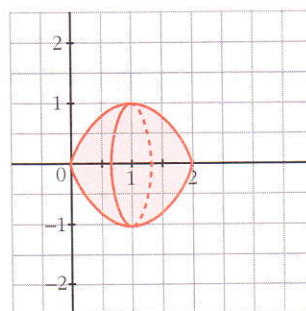
$$\text{Volum} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

EXERCICI RESOLT

Troba el volum del cos que es crea en girar la paràbola $y = 2x - x^2$ al voltant de l'eix X entre $x = 0$ i $x = 2$.

Resolució

$$\begin{aligned} \text{Volum} &= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \pi \left[\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{15} \approx 3,35 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



1 Troba el volum del con que es crea en girar la recta $y = 2x - 2$ al voltant de l'eix OX entre $x = 1$ i $x = 4$.

2 Calcula el volum del cos que es crea en girar la paràbola $y = 3x - x^2$ al voltant de l'eix d'abscisses entre $x = 0$ i $x = 3$.

3 Calcula el volum del cos que es crea en girar la paràbola $y = x^2 + 2$ al voltant de l'eix X entre $x = -1$ i $x = 1$.

4 Troba el volum del cos que es crea en girar la paràbola $y = \sqrt{x+1}$ al voltant de l'eix X entre $x = -1$ i $x = 1$.

5 Calcula el volum del cos que es crea en girar la corba $y = \sqrt[3]{x}$ al voltant de l'eix X entre $x = 1$ i $x = 8$.

6 Troba el volum del cos creat en fer girar la paràbola $y^2 = 4ax$ al voltant de l'eix X entre $x = 0$ i $x = a$.

7 Troba el volum d'una esfera de radi 2 fent girar la semicircumferència $y = \sqrt{4-x^2}$ al voltant de l'eix X .

8 Troba el volum del cos creat en fer girar l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ al voltant de l'eix X .

9 Troba el volum del cos que es crea en fer girar la corba $y = e^x$ al voltant de l'eix X entre $x = 0$ i $x = a$, amb $a > 0$.

10 Demuestra que el volum del cos que es crea en fer girar la paràbola $x^2 - y^2 = a^2$ al voltant de l'eix X entre $x = a$ i $x = 2a$ és igual al volum de l'esfera de radi a .

☛ El volum de l'esfera de radi a és $\frac{4}{3}\pi a^3$.

3.5 LA INTEGRAL I LA SEVA RELACIÓ AMB LA DERIVADA. TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL

TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL

Si f és una funció contínua a $[a, b]$, aleshores la funció:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ amb } x \in [a, b], \text{ és derivable i es verifica que } F'(x) = f(x).$$

EXERCICI RESOLT

Troba la derivada de la funció: $F(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt$

RESOLUCIÓ

Pel teorema fonamental del càlcul, sabem que $F'(x) = e^{-x^2}$.

1 Troba la derivada de les funcions següents:

a) $F(x) = \int_1^x (t^2 - 1) dt$

b) $F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 1)$

c) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$

d) $F(x) = \int_5^x te^{-t^2} dt$

• Si $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t) dt$, aleshores $F'(x) = f[h(x)] \cdot h'(x)$

• Si $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$, aleshores $F'(x) = f[h(x)] \cdot h'(x) - f[g(x)] \cdot g'(x)$

(Suposem que estem considerant funcions contínues.)

EXERCICI RESOLT

Troba la derivada d'aquestes funcions:

a) $F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t+1} dt$

b) $F(x) = \int_{3x}^{x^2} e^{-t} dt$

RESOLUCIÓ

a) $F'(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot 2x$

b) $F'(x) = e^{-x^2} \cdot 2x - e^{-3x} \cdot 3$

2 Troba la derivada de $F(x)$ en cada cas:

a) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2+1} dt$

b) $F(x) = \int_2^{x^3} \cos(t+1) dt$

c) $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t} dt$

d) $F(x) = \int_x^{\cos x} (1-t) dt$

EXERCICI RESOLT

Donada la funció $F(x) = \int_0^{x^2} (t-4) dt$, $x \geq 0$, estudia el creixement i el decreixement, i troba els seus extrems relatius.

RESOLUCIÓ

- Derivem i igualem a zero:

$$F'(x) = (x^2 - 4) \cdot 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

(No prenem $x = -2$, ja que només estem considerant $x \geq 0$.)

- Estudiem el signe de $F'(x)$:

x	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signe de F'	-	+
F		

$F(x)$ és decreixent en $(0, 2)$ i creixent en $(2, +\infty)$.

Té un màxim en $x = 0$ i un mínim en $x = 2$.

- Ordenada del màxim: $F(0) = \int_0^0 (t-4) dt = 0 \rightarrow$ Punt $(0, 0)$

- Ordenada del mínim: $F(2) = \int_0^4 (t-4) dt = -8 \rightarrow$ Punt $(2, -8)$

3 Donada la funció $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)e^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$:

- Calcula $F'(x)$, estudia el creixement de $F(x)$ i troba les abscisses dels seus màxims i mínims relatius.
- Calcula $F''(x)$, estudia la concavitat i la convexitat de $F(x)$ i troba les abscisses dels seus punts d'inflexió.

3.6 EXERCICIS DE RECAPITULACIÓ

1 Calcula les integrals següents:

a) $\int_{-2}^3 (3x^2 - x) dx$

b) $\int_0^1 \frac{2}{x+3} dt$

c) $\int_{-1}^0 e^{3x+3} dx$

2 Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula:

a) $\int_0^1 f(x) dx$

b) $\int_1^3 f(x) dx$

c) $\int_{-1}^2 f(x) dx$

3 Troba l'àrea compresa entre la gràfica de la funció de l'exercici anterior, l'eix OX , i les rectes $x = -2$ i $x = 2$.

4 Calcula la primitiva de $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 0$.

5 Determina un polinomi $P(x)$, de segon grau, sabent que:

$$P(0) = P(2) = 1 \text{ i } \int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}$$

6 Donada la funció $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$:

a) Calcula els valors de a i b de manera que f tingui un màxim en $x = 1$ i un mínim en $x = 2$.

b) Troba l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$ i l'eix OX entre $x = 0$ i $x = 3$.

- 7 a) Donada la paràbola $f(x) = x^2 + bx + c$, calcula b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ passa per $(0, 2)$ i té un mínim en $x = 1$.
b) Calcula l'àrea limitada per $f(x)$, l'eix X i les rectes $x = 1$ i $y = -x + 4$.

- 8 Donada la funció $f(x) = 3ax^2 + \frac{2a}{x^3} + 5$, ($x > 0$):
a) Troba el valor de $a > 0$, sabent que certa funció, F , és una primitiva de f i verifica que $F(1) = 6$ i $F(2) = 42$.
b) Troba en aquest cas l'àrea limitada per la corba i l'eix X entre $x = 1$ i $x = 2$. (Observa que $f(x) > 0$ per a qualsevol $x > 0$.)

- 9 Obtén la funció $f(x)$ la derivada de la qual és la funció $g(x) = (x-1)e^x$, de manera que f tingui un extrem relatiu en un punt de l'eix d'abscisses. Raona si aquest punt és màxim o mínim.

- 10 Dibuixa i troba l'àrea del triangle mixtilini els vèrtexs del qual són $A(-1, -1)$, $B(1, 0)$ i $C(1, 1)$, sabent que els costats AB i BC són rectes i que la línia AC és la corba de l'equació $y = x^3$.

- 11 La corba $y = 2x^2$ divideix el quadrat de vèrtexs $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ i $D(0, 1)$ en dos recintes. Dibuixa aquests recintes i troba l'àrea de cada un d'ells.

- 12 Troba el volum del cos que es forma en fer girar l'el·lipse $4x^2 + 25y^2 = 100$ al voltant de l'eix X .