

Producte escalar

Definició: Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, el **producte escalar de dos vectors**, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ és el resultat de multiplicar el mòdul dels dos vectors pel cosinus de l'angle que formen:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

S'anomena producte escalar perquè el resultat és un escalar. És associar un escalar a dos vectors inicials donats. I aquest escalar tindrà bones propietats i ens serà molt útil, veiem-ne algunes aplicacions.

Trobar el producte escalar és un càlcul fàcil. I quina informació ens aporta? És interessant en el cas que aquest producte doni 0: com els mòduls no poden ser 0 (no agafem vectors de longitud 0), aleshores el cosinus val 0. I això només passa quan l'angle és recte (90°). Podem formular aquest resultat així:

Dos vectors són ortogonals (perpendiculars) si i només si el seu producte escalar val 0.

La fórmula del producte escalar també ens ajuda a trobar l'angle entre dos vectors. Si l'aïllem de la fórmula ens queda:

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Però tenim un problema amb aquesta fórmula: el numerador, el càlcul del producte escalar. Aquest càlcul pot ser complicat si els dos vectors no estan escrits en base canònica. Doncs bé, aquest cas el deixem per un altre curs i al batxillerat només calcularem el producte escalar en base canònica. En aquest cas el càlcul serà fàcil:

Si els vectors $\vec{u} = (a, b, c)$ i $\vec{v} = (d, e, f)$ estan expressats en la base canònica, aleshores $\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b, c) \cdot (d, e, f) = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$.

Nota: Ja sabem que al calcular un arccosinus ens surt més d'un resultat (de fet surten infinits resultats). Per evitar problemes, i que a tothom li doni el mateix, ens quedarem amb el valor positiu més petit (normalment és el que ens dona la calculadora).

Exercicis

[28] Raoneu quan val el producte escalar d'un vector per si mateix.

[29] Determineu l'angle que formen cada parell dels següents vectors:

- (a) $\vec{u} = \left(-2, 1, \frac{1}{3}\right)$ i $\vec{v} = (0, 2, -3)$ (c) $\vec{u} = \left(\frac{3}{4}, \sqrt{3}, -5\right)$ i $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$
- (b) $\vec{u} = \left(-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\vec{v} = \left(3, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$

- [30] Considereu els vectors $\vec{u} = (1, m, 3)$ i $\vec{v} = (0, 2, -5)$. Determineu el valor de m sabent que els vectors formen un angle de 120° .
- [31] Determineu els valors de m per als quals els vectors $\vec{u} = (m, -1, -m)$ i $\vec{v} = (m, 4, -3)$ són perpendiculars.
- [32] Donats els vectors $\vec{u} = (3, m, 5)$ i $\vec{v} = (2, -7, m)$, quin és el valor de m perquè els vectors siguin perpendiculars? I paral·lels?
- [33] Considereu els punts $A(-1, 2, -1)$, $B(m, 1, 0)$ i $C(2, -m, 3)$.
- (a) Determineu el valor de m per al qual els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ són perpendiculars.
- (b) Per a $m = 1$, trobeu l'angle que formen $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$.
- [34] Trobeu el valor de m per tal que els punts $A(5, m, 7)$, $B(3, -1, 4)$ i $C(6, 5, 4)$ formin un triangle rectangle amb l'angle recte a B .
- [35] Donats els punts $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$ i $C(0, -2, 0)$ calculeu:
- (a) Les coordenades del punt D que fan que $ABDC$ (és a dir, A i D són vèrtexs oposats) sigui un paral·lelogram.
- (b) El perímetre del paral·lelogram.
- (c) La longitud de les seves diagonals.
- (d) Els angles interiors del paral·lelogram.
- [36] Raoneu si el triangle de vèrtexs $A(1, -2, 1)$, $B(-3, 1, 0)$ i $C(1, -2, -1)$ és isòsceles.

Solucions

- [28]
- [29] (a) 83° (b) $112,4^\circ$ (c) 90°
- [30] $m = -20,7$ i $m = 2,3$ [31] $m = -4$ i $m = 1$
- [32] (a) $m = 3$ (b) No poden ser paral·leles.
- [33] (a) $m = -9/4$ (b) $24,5^\circ$
- [34] $m = -2$
- [35] (a) $D(-1, 2, -2)$ (c) Les dues diagonals mesuren $\sqrt{26} u$
 (b) $13,6 u$ (d) 90° , en realitat és un rectangle
- [36] Sí (cal raonar la resposta).