

Producte vectorial

Si el producte escalar associa dos vectors a un escalar, el producte vectorial associa dos vector a un vector, d'aquí el seu nom.

Per tal que el càlcul no surti complicat ho farem només per vectors que estan en la base canònica (per altres bases, en un curs més avançat).

Definió: Donats els vectors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en la base canònica, el seu producte vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ és:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Si us sembla complicat podeu anar al resultat final: calculem tres determinants dos per dos i ja està. Fàcil. Però si voleu fer l'esforç d'entendre com ho han fet us ho explico.

Primer posem en un determinant el dos vectors i un vector format per tres vectors(!) $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, és a dir es barregen nombres (les components dels vectors) i vectors, però farà que tot funcioni. Aquesta barreja fa que no els puguem operar de qualsevol manera i el que farem serà aplicar una de les propietats de determinants que vam estudiar: desenvoluparem el determinant per la primera fila. Ens quedaran tres determinants dos per dos. I què pinten $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$? Doncs ens diu que el nou vector estarà escrit en aquesta base i, per tant, els tres determinants són les coordenades d'aquests nou vector.

Exemple: Donats els vectors $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ i $\vec{v} = (1, 1, 1)$ en la base canònica, el seu producte vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ és:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (1, 1, -2)$$

Algunes propietats del producte vectorial: Sigui $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors, aleshores es compleix:

- Mòdul del nou vector: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$, on α és l'angle que formen els dos vectors.
- Direcció del nou vector: $\vec{u} \times \vec{v}$ és un vector perpendicular a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$.
- Producte vectorial d'un vector per si mateix: $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- Propietat anticommutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- Propietat distributiva: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- Propietat respecte al producte per nombres reals: $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$
- El producte vectorial de dos vectors no nuls és el vector nul si i només si els vectors són paral·lels.

Aplicacions del producte vectorial:

- Per trobar un nou vector $\vec{w}$ perpendicular a dos donats: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

- Per calcular l'àrea d'un paral·lelogram. Sigui un paral·lelogram de vèrtexs $ABCD$ (doneu la volta al paral·lelogram en aquest ordre, no importa si en sentit horari o antihorari). Aleshores la seva àrea és:

$$\text{Àrea} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

- Per calcular l'àrea d'un triangle. Sigui un triangle de vèrtexs ABC . Aleshores la seva àrea és:

$$\text{Àrea} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

Exercicis

- [37] Determineu el producte vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ dels següents vectors:
- (a) $\vec{u} = (-1, 2, 2)$ i $\vec{v} = (3, 2, -5)$ (c) $\vec{u} = (\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0)$ i $\vec{v} = (1, \sqrt{2}, -1)$
- (b) $\vec{u} = \left(3, -4, \frac{1}{3}\right)$ i $\vec{v} = (1, -3, 2)$
- [38] Sabem que $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $|\vec{v}| = 5$ i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle de 45° . Determineu $|\vec{u} \times \vec{v}|$.
- [39] Calculeu el valor de m perquè el producte vectorial dels vectors $\vec{u} = (-1, m, 0)$ i $\vec{v} = (-m, 0, 1)$ sigui paral·lel al vector $\vec{w} = (1, -1/2, -2)$.
- [40] Donats els vectors $\vec{u} = (1, -2, 4)$ i $\vec{v} = (-3, 0, 1)$, trobeu un vector unitari i perpendicular a aquests dos.
- [41] Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u} = (2, 1, 3)$ i $\vec{v} = (-3, -1, 6)$ amb la primera coordenada igual a 1.
- [42] Determineu l'àrea del triangle de vèrtexs $A(-2, -2, 0)$, $B(1, 0, -1)$ i $C(0, 4, -1)$.
- [43] Donat el triangle de vèrtexs $A(1, -3, 5)$, $B(-2, 1, 0)$ i $C(3, -1, 1)$, determineu l'altura corresponent al vèrtex B .
- [44] Determineu el tipus de triangle representat pels vèrtexs $A(-3, 3, 1)$, $B(-1, 0, 0)$ i $C(0, 1, 1)$ i calculeu:
- (a) El perímetre. (b) Els angles interiors. (c) La superfície.
- [45] Donats els punts $A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 0)$ i $C(0, 1, 4)$:
- (a) Determineu les coordenades d'un punt D perquè $ABDC$ sigui un paral·lelogram.
- (b) Calculeu el perímetre i la superfície del paral·lelogram.
- [46] Determineu el valor de m perquè la superfície del triangle de vèrtexs $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ i $C(1, 6, m)$ tingui una àrea de $\frac{3}{2}u^2$.

Solucions

- [37] (a) $(-14, 1, -8)$ (b) $\left(-7, -\frac{17}{3}, -5\right)$ (c) $(-\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{3})$

$$\boxed{38} \quad 5 \text{ u}^2$$

$$\boxed{39} \quad m = -2$$

$$\boxed{40} \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{209}}, -\frac{13}{\sqrt{209}}, -\frac{6}{\sqrt{209}} \right)$$

$$\boxed{41} \quad \left(1, -\frac{7}{3}, \frac{1}{9} \right)$$

$$\boxed{42} \quad 7,3 \text{ u}^2$$

$$\boxed{43} \quad 5,5 \text{ u}$$

$\boxed{44}$ Es tracta d'un triangle escalè.

$$(a) \quad 9,1 \text{ u}$$

$$(b) \quad 27,2^\circ, 72^\circ \text{ i } 80,8^\circ$$

$$(c) \quad 3,1 \text{ u}^2$$

$$\boxed{45} \quad (a) \quad D(1, -1, 4)$$

$$(b) \quad \text{Perímetre } 12,7 \text{ u; àrea } 9 \text{ u}^2$$

$$\boxed{46} \quad m = 4$$