

Producte mixt

El producte mixt és una barreja dels dos productes anteriors, l'escalar i el vectorial. En aquest cas no partirem de dos vectors sinó de tres i el resultat serà un escalar. Òbviament, com sempre, aquest escalar tindrà unes aplicacions molt interessants.

Definició: S'anomena producte mixt de 3 vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, i ho escriurem com $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ a:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Si els dos productes anteriors només els vam calcular per vectors en base canònica, seguirem fent el mateix. Doncs bé, resulta que en la base canònica ni tan sols hem de calcular el producte escalar i el producte vectorial de la fórmula anterior. Molt més fàcil, ho podem fer a partir del determinant dels tres vectors. És a dir:

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tres vectors expressats en base canònica, aleshores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

No importa si poseu els vectors per files o per columnes però els heu de posar per ordre (si no ho feu us pot sortir el resultat amb el signe canviat, res més).

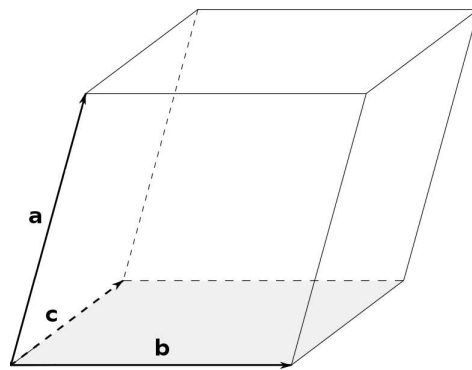
Aplicacions del producte mixt

Volum d'un paral·lelepípede

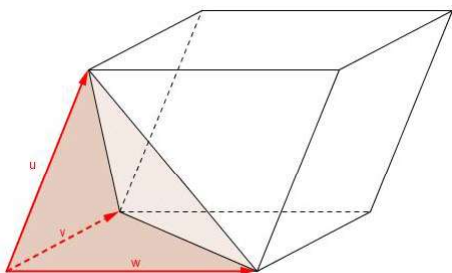
En la figura de la dreta veiem un paral·lelepípede construït a partir de tres vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Doncs bé, el volum d'aquesta figura és:

$$\text{Volum} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

És a dir, heu de fer el valor absolut del determinant d'aquests tres vectors. No importa l'ordre en què els posem dins del determinant ja que al final agafarem el valor absolut d'aquest nombre.



Volum d'un tetraedre



La figura fosca de l'esquerra (poliedre de quatre cares triangulars) és un tetraedre. A partir dels tres vectors que el formen $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ podem calcular el seu volum. L'he inclòs dins un paral·lelepípede perquè es vegi la relació que tenen: dins un paral·lelepípede tenim sis tetraedres del mateix volum. Per tant la fórmula surt fàcil a partir de l'anterior:

$$\text{Volum} = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{6}$$

Exercicis

- [47] Trobeu $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en els següents casos:
- $\vec{u} = (0, 4, 2)$, $\vec{v} = (-2, 7, 1)$ i $\vec{w} = (5, -2, 1)$
 - $\vec{u} = (0, 4, 2)$, $\vec{v} = (5, -2, 1)$ i $\vec{w} = (-2, 7, 1)$
 - $\vec{u} = (9, 4, 1)$, $\vec{v} = (-1, 5 - 11)$ i $\vec{w} = (12, 6, 0)$
- [48] Determineu el volum del tetraedre que descriuen els vectors $\vec{u} = (3, 0, -2)$, $\vec{v} = (5, -6, 5)$ i $\vec{w} = (7, 0, -7)$.
- [49] Els vèrtexs d'un tetraedre es corresponen amb els punts $A(3, 4, 0)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(3, -2, 0)$ i $D(0, -6, 9)$. Determineu el volum d'aquest tetraedre.
- [50] Raoneu quan val el producte mixt de tres vectors que estan continguts dins del mateix pla (aquest resultat us ajudarà a fer els exercicis següents).
- [51] Raoneu si els següents punts poden ser els vèrtexs d'una paral·lelepípede:
- $A(1, 1, -1)$, $B(-3, 0, -7)$, $C(1, 4, 5)$ i $D(-2, 3, 5)$
 - $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, -1)$, $C(4, 1, 2)$ i $D(0, -3, 1)$
- [52] Raoneu si es pot formar un tetraedre amb vèrtexs $A(-6, 1, 1)$, $B(0, -2, 5)$, $C(-1, -3, 4)$ i $D(-8, 1, 1)$.
- [53] Trobeu el valor de m perquè els vectors $\vec{u} = (1, m - 2, -1)$, $\vec{v} = (2, 5, 0)$ i $\vec{w} = (1, m, 1)$ determinin un paral·lelepípede de volum 6.
- [54] Determineu l'àrea i el volum d'un paral·lelepípede de vèrtexs $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 5, 3)$ i $D(1, 0, 1)$.
- [55] Els vectors $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (-4, 0, 2)$ i $\vec{w} = (m, -1, 3)$ generen un paral·lelepípede de volum $30 u^3$. Trobeu el valor de m .
- [56] Els vectors $\vec{u} = (0, m, m)$, $\vec{v} = (m - 3, m + 4, 0)$ i $\vec{w} = (m, 4, -m)$ generen un paral·lelepípede de volum $9 u^3$. Trobeu el valor de m .
- [57] Determineu el valor del paràmetre m sabent que el volum del tetraedre amb vèrtexs $A(3, 5, 7)$, $B(1, 0, -1)$, $C(7, -1, 4)$ i $D(m, 4, -6)$ és de $107 u^3$.

Solucions

- [47] (a) -34 (b) 34 (c) 0
- [48] $7 u^3$ [49] $21 u^3$ [50] .
- [51] (a) Sí (b) No
- [52] Sí [53] $m = 2$ o $m = 5$
- [54] L'àrea és de $14\sqrt{6} u^2$ i el volum de $8 u^3$.
- [55] $m = 9$ o $m = -21$
- [56] $m = -3$ o $m = -1$ o $m = -2 - \sqrt{7}$ o $m = \sqrt{7} - 2$
- [57] $m = 11$ o $m = -\frac{307}{11}$