

Geometria a l'espai

En aquest tema estudiarem la geometria lineal en tres dimensions, és a dir a l'espai. Lineal vol dir que els objectes que ens trobarem no tenen curvatura. El curs passat al fer geometria del pla (en dues dimensions), els únics objectes amb els que vam haver de treballar eren les rectes. Al augmentar una dimensió ens apareixeran també els plans.

Pot ser que la geometria ens resulti una mica complicada, però tenim una ajuda important: l'àlgebra. Normalment el que fem és que ens donen un problema geomètric i el convertim en un problema algebraic de vectors, matrius o sistemes d'equacions (per això hem fet tanta àlgebra darrerament!), el resollem algebraicament i tornem al món de la geometria per treure conclusions geomètriques. Per tant la majoria de coses que farem en aquest tema és resoldre equacions, calcular el rang d'una matriu, usar vectors... però a part haurem d'aprendre la seva interpretació geomètrica.

Aquest tema el dividirem en tres blocs:

- **Construcció** dels objectes lineals a l'espai: les rectes i els plans.
- **Geometria afí**, és a dir, posició relativa entre els diferents objectes: es tallen? són paral·lels? tenen algun punt en comú?...
- **Geometria euclideana**, és a dir, estudi de les propietats mètriques: distàncies i angles. Ens preguntarem a quina distància es troben els objectes o quin angle formen entre ells.

Comencen doncs amb la construcció de les rectes i els plans.

Rectes a l'espai

La construcció de rectes a l'espai segueix la mateixa pauta que les rectes al pla del curs anterior. Necessitem un vector director de la recta (un vector que ens indica la direcció) $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i un punt qualsevol de la recta $P(p_1, p_2, p_3)$.

La manera de construir una recta a partir del vector $\vec{v}$ i el punt P és la següent: per obtenir els punts d'una recta (x, y, z) hem d'agafar el vector director $\vec{v}$ i allargar-lo o escurçar-lo o fins i tot canviar-li el sentit, així anirem obtenint els infinits punts de la recta. És a dir, el que haurem de fer és agafar un paràmetre λ i calcular $\lambda \cdot \vec{v}$. Però els vectors són lliures i si volem que passi per un lloc concret l'hem de clavar a aquest lloc (a qualsevol punt de la recta), és a dir, li hem de sumar el punt P : $P + \lambda \cdot \vec{v}$. Ja tenim la recta. Si ara usem les coordenades obtindrem una equació:

$$\text{punts de la recta} = P + \lambda \cdot \vec{v}$$

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Aquesta és l'**equació vectorial de la recta**. Ara el que farem és desenvolupar aquest resultat fins a obtenir un sistema d'equacions:

$$(x, y, z) = (p_1 + \lambda \cdot v_1, p_2 + \lambda \cdot v_2, p_3 + \lambda \cdot v_3)$$

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot v_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}$$

Aquesta és l'**equació paramètrica de la recta**. No hem de perdre mai de vista les diferents funcions de les lletres: λ és un **paràmetre** que quan l'anem variant obtenim els diferents punts de

la recta, x , y i z són **incògnites**, els diferents punts de la recta, la resta de lletres són **nombres**, les components del punt i del vector. Ara aïllem la λ de cada equació:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - p_1}{v_1} \\ \lambda = \frac{y - p_2}{v_2} \\ \lambda = \frac{z - p_3}{v_3} \end{cases}$$

Com la λ és sempre la mateixa, tenim tres coses iguals:

$$\boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}}$$

Aquesta expressió s'anomena **equació continua de la recta** i és molt interessant perquè ja no necessitem el paràmetre per expressar la recta. Fixeu-vos bé el lloc que ocupen les coordenades del punt i del vector director. Podem començar molts dels nostres problemes en aquesta expressió enlloc de les anteriors. (Nota: està permès, en aquesta expressió dividir per 0; és una convenció d'escriptura que no afecta al resultat). Ara separarem aquestes igualtats:

$$\begin{cases} \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \\ \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{z - p_3}{v_3} \end{cases}$$

(Nota: no importa si com a segon equació haguéssim agafat $\frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$. L'important és que les dues equacions que agafem siguin diferents). Podem arreglar una mica més aquest resultat:

$$\begin{cases} v_2 \cdot (x - p_1) = v_1 \cdot (y - p_2) \\ v_3 \cdot (x - p_1) = v_1 \cdot (z - p_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 \cdot x - v_2 \cdot p_1 = v_1 \cdot y - v_1 \cdot p_2 \\ v_3 \cdot x - v_3 \cdot p_1 = v_1 \cdot z - v_1 \cdot p_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot p_1 - v_1 \cdot p_2 \\ v_3 \cdot x - v_1 \cdot z = v_3 \cdot p_1 - v_1 \cdot p_3 \end{cases}$$

Resumint, ens han quedat dues equacions del tipus:

$$\boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}}$$

Aquesta forma és l'**equació general** o implícita o cartesiana de la recta. Algunes lletres majúscules poden valer 0. Hem començat amb un concepte geomètric, la construcció d'una recta a l'espai i hem acabat al món de l'àlgebra: una recta a l'espai està representada per dues equacions amb tres incògnites (complint certes condicions que veurem tot seguit).

I ara invoquem a Gauss que ens vingui a ajudar. Aquest sistema ha de tenir solució (sistema compatible), de fet ha de tenir infinites solucions (sistema compatible indeterminat) ja que la recta té infinits punts (cada punt geomètric és una solució d'un sistema d'equacions algebraic).

Si és un sistema compatible el rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada han de ser iguals. Si és indeterminat, aquests dos rangs no poden coincidir amb el nombre d'incògnites (3). Els rangs podran ser iguals a 1 o a 2. Però hem fet servir només una λ , un grau de llibertat, llavors

3 incògnites menys 1 grau de llibertat ens dona 2: el sistema ha de tenir rang 2, tant la matriu del sistema com l'ampliada.

És molt important controlar els rangs perquè és el que defineix de quin tipus d'objecte es tracta. En aquest cas ho podem resumir de la següent manera: si tenim dues equacions amb tres incògnites i els dos rangs, el del sistema i el de la matriu ampliada valen 2, aleshores es tracta d'una recta a l'espai.

Si penseu les rectes al pla, les que vau estudiar el curs anterior, tenien una pinta així $Ax + By = C$, és a dir que les rectes al pla venen representades per una equació amb dues incògnites i el rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada valdran 1.

I ara ens podem preguntar: què tenen en comú una recta del pla, una recta de l'espai, o una recta de la dimensió 27 (o de qualsevol dimensió)? Doncs que totes tenen un grau de llibertat (un paràmetre) i que si mirem els dos rangs seran iguals a $n - 1$, on n és la dimensió en la que es troben.

Exercicis

Nota: En tots els exercicis de geometria, si no s'especifica una expressió concreta podem fer servir la que vulguem. El millor és fer servir la més senzilla en cada problema, i saber quina és ens hi portarà la pràctica. Així que ja sabeu.

- [1] Siguin els punts $A(2, 1, 1)$, $B(-3, 0, 2)$ i $C(1, -2, 4)$. Indiqueu quins d'aquests punts pertanyen a la recta d'equació $r : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- [2] Determineu el punt de la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z - 6 = 0 \end{cases}$ que té la segona coordenada nul·la.

- [3] Trobeu totes les equacions de la recta que passa pels punts $A(3, 5, -1)$ i $B(2, 1, -2)$.

- [4] Determineu l'equació de la recta que passa pel punt $A(-3, 2, 7)$ i es paral·lela a l'eix OZ.

- [5] Determineu, en cada cas, l'equació de la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta r :

(a) $P(1, -3, 0)$ i $r : \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} = z$ (b) $P(5, 1, 1)$ i $r : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

- [6] Donada la recta $r : x - 1 = \frac{y+2}{-2} = z$, hi ha algun punt d'aquesta recta que tingui les tres coordenades iguals?

- [7] Trobeu m i n de manera que el punt $(m+n, 2m-n, 2)$ pertanyi a la recta que passa pels punts $(2, 1, 0)$ i $(-3, 0, -1)$.

- [8] Comproveu que el punt $P(-1, 2, 7)$ no pertany a la recta $r : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$. Trobeu l'equació paral·lela a aquesta que sí conté el punt P .

Solucions

Nota: Les solucions que trobeu, sobretot aquelles que impliquen equacions, poden ser diferents de les del solucionari, però això no vol dir que estiguin malament. De ser correctes les dues, es tracta de solucions equivalents, és a dir solucions d'aparença diferent però que en realitat representen el mateix.

[1] El punt C

[2] $(2, 0, -2)$

[3] Equació vectorial: $(x, y, z) = (2, 1, -2) + \lambda \cdot (1, 4, 1)$; equació paramètrica:
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases} ;$$

equació contínua: $x - 2 = \frac{y - 1}{4} = z + 2$; equació general:
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x - z = 4 \end{cases}$$

[4] $(x, y, z) = (-3, 2, 7) + \lambda(0, 0, 1)$

[5] (a) $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{5} = z$

(b)
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

[6] No.

[7] $m = 5$ i $n = 7$

[8] $r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases}$