

Plans a l'espai

Una recta és un objecte geomètric d'una dimensió: necessitem un vector director per construir-la. Un pla té dues dimensions, per tant necessitarem dos vectors directors. Després ens caldrà un punt per fixar per on passa aquest pla.

Si ens imaginem un paper infinit i comencem a dibuixar vectors no acabariem mai. Però no importa quants n'agafem ni com són, que només en trobarem, com a màxim, dos d'independents. Per això un pla té dimensió 2.

Per construir el pla farem un procediment molt semblant al de la recta. Agafem dos vectors directors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i un punt del pla $P(p_1, p_2, p_3)$. Ara farem una combinació lineal dels dos vectors i li sumarem P per tal de fixar per on passarà aquest pla:

$$\text{punts del pla} = P + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Aquesta és l'**equació vectorial** del pla. Si seguim fent les operacions:

$$(x, y, z) = (p_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1, p_2 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2, p_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3)$$

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{cases}$$

Hem obtingut l'**equació paramètrica** del pla. El següent pas seria fer desaparèixer els paràmetres, però tenint-ne dos no és una qüestió senzilla. Per fe-ho deixarem aquest camí i agafarem una via molt original.

Agafem un conjunt format per tres vectors del pla. Els dos primers seran els vectors directors del pla. Ara agafem el punt P i un punt qualsevol del pla (x, y, z) i en calculem el vector corresponent: $(x, y, z) - P$. Ja tenim els tres vectors. Què podem dir del rang d'aquests tres vectors? Com estan sobre el mateix pla el seu rang és 2. Podem fer servir aquest resultat, però encara el simplifiquem més: calcularem el determinant d'aquests tres vectors.

Que tres vectors tinguin rang 2 vol dir que un és combinació lineal dels altres. Si calculem el determinant d'aquests tres vectors, sabem que hi ha una propietat que diu que si un és combinació lineal dels altres el determinant val 0. Fent servir equacions ens queda:

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Nota: no importa si enlloc de files posem els vectors per columnes i tampoc si els posem en un ordre diferent. De fet al final arribarem a un resultat del tipus:

$$Ax + By + Cz = D$$

Acabem d'obtenir l'**equació general** o implícita del pla.

Per tant un pla a l'espai (geometria) és equivalent a una equació amb tres incògnites (àlgebra). Evidentment aquesta equació tindrà rang 1 (només tenim una fila) i dos graus de llibertat (3 incògnites menys 1 de rang, per això hem usat dos graus de llibertat).

I què podem dir dels plans en altres dimensions? Com és un pla a la quarta dimensió? I a la dimensió 27? Doncs la característica comuna és que sempre tenen dos graus de llibertat i per tant, el seu rang és sempre $n - 2$, on n és la dimensió de l'espai en el que es troben.

Hi ha un vector que queda fora del pla i que ens és de gran utilitat: el **vector normal** del pla. El vector normal és un vector perpendicular al pla (i perpendicular a tots els vectors continguts en

el pla). I el millor de tot, si el pla té d'equació $Ax + By + Cz = D$, aleshores el vector normal del pla és $\vec{N} = (A, B, C)$, per això és tan útil.

Fins ara hem estudiat les rectes i els plans. Les rectes són objectes amb un grau de llibertat i els plans amb dos graus de llibertat. Dins de l'espai tridimensional en el que estem ja no hi ha espai per altre tipus d'objectes. I si anéssim a espais amb més dimensions? Doncs aleshores sí però, a part de les rectes i els plans, només mostrariem interès pels hiperplans (objectes de $n - 1$ graus de llibertat dins d'un espai de n graus de llibertat i per tant, tots els hiperplans es poden explicar amb una sola equació). De fet amb aquesta definició, a l'espai els plans els podríem considerar hiperplans.

Exercicis

- [9] Donats els punts $A(2, 3, -1)$, $B(0, 1, 1)$ i $C(3, 0, 0)$ determineu les diferents equacions del pla que formen.
- [10] Determineu l'equació general del pla que conté el punt $P(2, 1, 1)$ i de vectors directors $\vec{u} = (1, 0, 1)$ i $\vec{v} = (-2, 1, 0)$.
- [11] Determineu l'equació general del pla que conté el punt $P(-3, 3, 1)$ i que té com a vector normal $\vec{N} = (2, 1, -1)$.
- [12] El pla $mx + 3y - 2z + 4 = 0$ passa pel punt $P(1, -2, 1)$. Calculeu el valor de m .
- [13] Determineu l'equació del pla que conté el punt $P(3, 3, 1)$ i és paral·lel al pla d'equació $x - y + z - 1 = 0$.
- [14] Determineu l'equació general del pla que conté el punt $P(2, -4, 2)$ i és perpendicular a la recta de vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
- [15] Determineu l'equació general del pla que conté el punt $P(-1, -1, 1)$, té la direcció del vector $\vec{v} = (1, 0, -2)$ i és paral·lel a la recta d'equació $\frac{x+5}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{4}$.
- [16] Sabem que el pla $\pi : Ax + By + Cz - 8 = 0$ talla els eixos de coordenades en els punts $(4, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ i $(0, 0, 1)$. Determineu el pla π .
- [17] Demostreu si els punts $A(3, -1, 2)$, $B(2, 5, 1)$, $C(-1, 0, 3)$ i $D(0, 1, -3)$ són coplanaris.
- [18] Calculeu el valor de a perquè els punts $A(0, 0, 6)$, $B(1, -1, 7)$, $C(-2, 3, -5)$ i $D(-3, -1, a)$ siguin coplanaris.
- [19] Considereu els punts $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ i $C(0, -1, -1)$:
 - (a) Trobeu l'equació del pla que conté aquests tres punts.
 - (b) Quant ha de valer k perquè el punt $(k, 0, 0)$ sigui coplanari amb els anteriors?
- [20] Donats els punts $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ i $C(1, 0, 0)$:
 - (a) Si $a = 2$, calculeu b perquè els tres punts determinin un pla que passi pel punt $P(2, 0, 1)$. Quina és l'equació d'aquest pla?
 - (b) Calculeu els valors de a i b perquè A , B i C estiguin alineats.

Solucions

[9] Equació vectorial: $(x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(1, -3, 1) + \mu(3, -1, -1)$; equació paramètrica:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda + 3\mu \\ y = -3\lambda - \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases} \quad ; \text{ equació general: } x + y + 2z = 3$$

[10] $x + 2y - z = 3$

[11] $2x + y - z = -4$

[12] $m = 4$

[13] $x - y + z + 1 = 0$

[14] $x + y + z = 0$

[15] $2x - 2y + z = 1$

[16] $x - 2y + 4z = 4$

[17] No són coplanaris.

[18] $a = -9$

[19] (a) $x - 2y + z = 1$

(b) $k = 1$

[20] (a) $b = 3$ i l'equació del pla és $x + y - z = 1$.

(b) $a = 1$ i $b = 2$.