

## Posició relativa de dos plans a l'espai

La millor manera d'estudiar la posició relativa de dos plans (o dues rectes o una recta i un pla), és a partir dels rangs, i això es pot fer de dues maneres: a partir de les equacions generals o de vectors. Veiem-ho començant pel cas més senzill: la posició relativa de dos plans.

*Cas A: estudi a partir de les seves equacions generals*

Ja hem vist que un pla a l'espai es pot representar algebraicament amb una equació amb tres incògnites. Per tant, formem un sistema d'equacions amb els dos plans  $Ax + By + Cz = D$  i  $A'x + B'y + C'z = D'$  i estudiem el seu rang.

Quins són els possibles rangs de la matriu del sistema i de la matriu ampliada del sistema? Doncs 1 o 2, en els dos casos. Construïm una taula on posarem en possibles rangs de la matriu del sistema en la primera columna i els rangs de la matriu ampliada en la primera fila:

| Rangs | 1 | 2 |
|-------|---|---|
| 1     |   |   |
| 2     |   |   |

Anem a raonar cada casella (*nota: per simplificar direm Rang 2,3 si volem dir que el rang del sistema és 2 i el rang de la matriu ampliada és 3*):

- Rang 1,1. Ens dona el mateix rang si tenim les dues equacions que sí en tenim una. Què canvia quan afegim una equació? Res. Perquè? Per què en realitat són la mateixa equació, són el mateix pla, són plans **coincidentes**.
- Rang 1,2. El sistema és incompatible, no té solució. Els dos plans doncs no tenen cap punt en comú. Com pot ser això? Perquè els dos plans són **paral·lels**.
- Rang 2,1. Impossible, el rang de la matriu ampliada no pot ser inferior al de la matriu del sistema.
- Rang 2,2. Sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Els dos plans tenen infinits punts en comú i aquests punts formen un objecte de dimensió 1 (el grau de llibertat). Per tant els dos plans tenen en comú una recta, els dos plans **es tallen en una recta**, són **secants**. I quina és l'equació d'aquesta recta? Doncs l'equació formada pels dos plans (una recta està formada per dues equacions, que de fet són dos plans que es tallen, són els punts en comú dels dos plans).

Tot això ho resumim en la taula ja completa:

| Rangs | 1            | 2                      |
|-------|--------------|------------------------|
| 1     | coincidentes | paral·lels             |
| 2     |              | es tallen en una recta |

*Cas B: estudi a partir de vectors*

Si treballem amb la forma vectorial o paramètrica de la recta, no té sentit perdre el temps per trobar les seves equacions generals, podem treballar directament amb vectors. Suposem que els dos plans estan representats així:  $P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$  i  $Q + \lambda\vec{w} + \mu\vec{t}$

Agafem com a matriu del sistema la formada pels quatre vectors directors:  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  i  $\vec{t}$ . Com a matriu ampliada del sistema afegim el vector que uneix els punts  $P$  i  $Q$ .

Quin és el rang mínim de la matriu del sistema? 2, ja que com a mínim necessitem dos vectors directors independents per tenir un pla. I el màxim? 3, perquè com a màxim tenim tres files. Així la taula que haurem d'omplir és la següent i els casos possibles són els mateixos que abans:

|       |             |                        |
|-------|-------------|------------------------|
| Rangs | 2           | 3                      |
| 2     | coincidents | paral·lels             |
| 3     |             | es tallen en una recta |

Estaria bé que entenguéssim cada casella. Raonem-les:

- La primera fila, la de rang de la matriu 2 ens està dient que quan agafem els quatre vectors directors és com si en tinguéssim només 2, és a dir els dos plans tenen la mateixa direcció: són coincidents o paral·lels. El rang de la matriu ampliada ens diferenciarà entre els dos casos.
- En canvi la fila del 3 ens diu que entre els dos plans necessitem tres direccions, els plans tenen direccions diferents i per això s'acaben tallant en una recta. O dit d'una altra manera, només comparteixen, dels quatre vectors directors, un, que just serà el vector director de la recta que comparteixen.

A l'hora de resoldre els exercicis hem de tenir present les taules anteriors. Si les entenem les podem reproduir ràpidament i no les hem de memoritzar.

## Exercicis

[21] Estudieu la posició relativa dels parells de plans següents:

(a)  $\pi_1 : x - 2y + 4z - 1 = 0$  i  $\pi_2 : 2x + 5y - 3z + 2 = 0$

(b)  $\pi_1 : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ z = 1 + 5\mu \end{cases}$  i  $\pi_2 : -5x + 5y + 4z - 12 = 0$

(c)  $\pi_1 : \begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = 3 + 2\lambda + 3\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 4\mu \end{cases}$  i  $\pi_2 : x - y + z + 2 = 0$

[22] En aquest apartat s'ha explicat com construir les taules que expliquen la posició relativa de dos plans, tant amb equacions com amb vectors. Intenta fer el mateix amb els següents casos:

(a) Una recta i un pla.

(b) Dues rectes.

## Solucions

[21] (a) Es tallen en una recta. (b) Paral·lels. (c) coincidents

[22] Veure les properes explicacions de la teoria.