

Posició relativa d'una recta i un pla

Cas A: estudi a partir de les seves equacions generals

En total tenim tres equacions amb tres incògnites, dues són de la recta i una del pla. El rang mínim és 2, ja que necessitem rang dos per tenir una recta. El rang màxim és 3 ja que només tenim tres files en total.

La taula quedarà de la següent manera:

Rangs	2	3
2	recta inclosa en el pla	paral·lels
3		es tallen en un punt

Analitzem cada cas:

- Rang 2, 2. Tenim un sistema compatible indeterminat amb un gra de llibertat, per tant, les solucions formen una recta. Dit d'una altra manera, el pla i la recta comparteixen una recta, o sigui, la recta està continguda en el pla.
- Rang 2, 3. Sistema incompatible, no té solució. Un pla i una recta no comparteixen res si són paral·lels.
- Rang 3, 2. Impossible el rang de la matriu ampliada no pot ser menor que el del sistema.
- Rang 3, 3. Sistema compatible determinat, una única solució. La recta i el pla només tenen un punt en comú, és a dir es tallen en un punt, són secants.

Cas B: estudi a partir de vectors

La matriu del sistema esta formada pels dos vectors directors del pla i el vector director de la recta; a la matriu ampliada afegim un vector construït a partir d'un punt del pla (qualsevol) i d'un punt de la recta (qualsevol).

Pel que hem vist en l'estudi de les equacions, ens trobarem tres casos i per tant, ja sabem quina forma tindrà la taula. Només hem de pensar els possibles rangs. Quin és el rang mínim? 2, ja que un pla està format per dos vectors linealment independents. Per tant ens quedarà la mateixa taula que abans:

Rangs	2	3
2	recta inclosa en el pla	paral·lels
3		es tallen en un punt

Estaria bé pensar què passa en cada casella. La primera fila ens diu que si agafo els dos vectors del pla i el vector director de la recta, el rang serà 2, és a dir, només dos vectors importen. Llavors seran paral·lels o la recta inclosa en el pla. La segona fila en canvi ens diu que necessitem les tres direccions, que el pla i la recta no tenen res a veure i això farà que es tallin en un punt.

Posició relativa de dues rectes

Cas A: estudi a partir de les seves equacions generals

Les equacions de les dues rectes formen un sistema de quatre equacions amb tres incògnites i el seu rang mínim és 2, ja que les rectes sempre tenen rang 2, 2. La matriu del sistema té un rang màxim de 3, ja que només tenim tres columnes, en canvi el rang màxim de l'ampliada és 4.

Rangs	2	3	4
2			
3			

Estudiem cada casella per poder omplir la taula:

- Dos casos són impossibles: rang 2, 4 (no pot augmentar de dos el rang quan només afegim una columna) i rang 3, 2 (no pot ser el rang de la matriu ampliada inferior a la del sistema).
- Rang 2, 2 i rang 3, 3 vol dir que els sistemes són compatibles, un és determinat (les rectes tindran un punt en comú, les rectes es tallen en un punt, són secants) i l'altre indeterminat (infinites solucions, un grau de llibertat, les dues rectes tenen un comú una recta, per tant, són la mateixa recta!).
- Rang 2, 3 i rang 3, 4 són sistemes incompatibles, no tenen solució, les rectes no tenen cap punt en comú. Quina diferència hi ha en cada cas? El rang 2 ens indica que les direccions de les rectes són iguals, per tant les rectes són paral·leles. L'altre cas són rectes que s'encreuen: rectes sense punts en comú però paral·leles (podeu imaginar les rectes com carreteres; queda clar el cas paral·lel, i el cas que s'encreuen són carreteres que no es toquen mai i que si les miréssim des dels núvols les veuríem en forma de X).

En resum, ens quedarà la següent taula:

Rangs	2	3	4
2	coincidentes	paral·leles	
3		es tallen en un punt	s'encreuen

Cas B: estudi a partir de vectors

La matriu del sistema està formada pels dos directors de la recta, i a l'ampliada afegim el vector que trobem al unir un punt d'una recta amb un punt de l'altra recta (no importa quins agafem, val qualsevol).

Ja sabem els quatre casos que ens sortiran, només hem de decidir els rangs mínims (1, una recta té un vector director) i màxims (3, tres files té la matriu).

Ens quedarà doncs la següent matriu:

Rangs	1	2	3
1	coincidentes	paral·leles	
2		es tallen en un punt	s'encreuen

Intenteu raonar cada casella com hem fet en els apartats anteriors.

Exercicis

23 Estudieu la posició relativa del parell de rectes següents:

$$(a) \quad r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{3} = z-3 \text{ i } s : x-2 = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$

$$(b) \quad r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = z+4 \text{ i } s : \frac{x+1}{-4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

$$(c) \quad r : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3} \text{ i } s : \begin{cases} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{cases}$$

$$(d) \ r : \begin{cases} 2x + z = 4 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases} \quad \text{i} \ s : \begin{cases} x + y - z = 8 \\ 3x - y + 3z = 18 \end{cases}$$

$$(e) \ r : \begin{cases} 2x + 4y - z = 7 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases} \quad \text{i} \ s : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

[24] Estudieu si les rectes següents són o no paral·leles, i si ho són, trobeu el pla que determinen:

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 13 \\ 2x - y - 7z = 16 \end{cases} \quad \text{i} \ s : \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

[25] Esbrineu si aquestes dues rectes es tallen i, en cas afirmatiu, en trobeu el punt de tall.

$$r : \begin{cases} x = -4 + 7\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{i} \ s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 10 + 4\mu \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

[26] Esbrineu si les dues rectes es tallen i, en cas afirmatiu, trobeu el pla que les conté.

$$r : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{i} \ s : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

[27] Estudieu la posició relativa de les parelles següents formades per una recta i un pla:

$$(a) \ r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{i} \ \pi : 2x - 3y + z - 2 = 0$$

$$(b) \ r : \begin{cases} 2x + y - 3z + 3 = 0 \\ 5x + 5y - 7z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \ \pi : x + 3y - z - 5 = 0$$

$$(c) \ r : \begin{cases} -4x + y - 2z + 3 = 0 \\ 2x + 4y + z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \ \pi : \begin{cases} x = -1 - \lambda + \mu \\ y = 2 + 2\lambda - \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

[28] Trobeu el valor de m perquè les rectes següents es tallin en un punt:

$$r : \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1} \quad \text{i} \ s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

[29] Estudieu la posició relativa de les rectes següents en funció del paràmetre m i, en cas que siguin secants, trobeu el punt de tall:

$$r : \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \ s : \frac{x+1}{2} = y + 1 = \frac{z+m}{-2}$$

- [30] Determineu el valor que ha de prendre m perquè les rectes $r : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{m^2} = \frac{z-m}{-4}$ i $s : \begin{cases} x = t+2 \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$ siguin paral·leles. En aquest cas, determineu l'equació del pla que les conté.
- [31] Determineu el valor de m perquè les rectes $r : \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z}{-3}$ i $s : x = y = z$ siguin secants i perpendiculars.
- [32] Determineu la posició relativa entre la recta $r : \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ i el pla $\pi : x+my-z-6=0$ en funció del paràmetre m .
- [33] Sigui la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$ i el pla $\pi : 2x - y + mz - 4 = 0$ són paral·lels. Determineu l'equació del pla perpendicular a π i que conté la recta r .
- [34] Considereu el pla d'equació $\pi : 2x + 3y + z + 1 = 0$ i la recta d'equació $r : \frac{-x}{2} = \frac{y}{-3} = -z$. Raoneu si són ortogonals.
- [35] Determineu el pla perpendicular a la recta $r : \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-3}$ i que conté el punt $(-3, 1, 0)$.

Solucions

- [23] (a) Secants (b) Paral·leles (c) Secants (d) S'encreuen (e) Coincidents
- [24] Sí són paral·lels i el pla que els conté: $(x, y, z) = (1, 2, 0) = \lambda(3, -1, 1) + \mu(1, -3, 3)$
- [25] Es tallen en el punt $(3, 2, -1)$.
- [26] Les rectes es tallen en un punt i el pla que les conté és $(x, y, z) = (3, 1, 0) + \lambda(2, 2, -1) + \mu(-2, 1, -1)$.
- [27] (a) Secants (b) Recta continguda en el pla (c) Paral·leles
- [28] $m = 7$
- [29] Si $m = 1$ les dues rectes es tallen en el punt $(-1, -1, -1)$. Si $m \neq 1$ les rectes s'encreuen.
- [30] Si $m = -2$ les rectes són paral·leles i el pla que les conté és $(x, y, z) = (2, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 1, 3)$
- [31] $m = 1$
- [32] Si $m = 2$ el pla i la recta són paral·lels. Si $m \neq 2$ el pla i la recta es tallen en un punt.
- [33] $(x, y, z) = (1, -2, 1) + \lambda(2, -1, -2) + \mu(3, 2, 2)$
- [34] Sí [35] $3x + 2y - 3z = -7$