

Distàncies

Quan volem saber una distància, agafem el punt de l'inici, el punt del final i mesurem. Si ho volem veure des del punt de vista de vectors, agafem els dos punts, els restem per construir el vector i calculem el mòdul d'aquest vector. Per tant la clau de tot és agafar els dos punts.

L'objectiu és, partint de dos objectes geomètrics (rectes, plans,...) triar un punt de cada objecte i calcular la distància entre aquests dos punts. I com els triarem? Doncs de manera que la distància sigui mínima, que no sigui possible fer un camí més curt entre un objecte i un altre.

Per calcular les distàncies, el punt de partida sempre és l'estudi de la posició relativa. Per exemple, quan els dos objectes tenen almenys un punt en comú, la distància val 0 (el camí més curt per anar d'un objecte a un altre té longitud 0).

En els casos que la distància no val 0, ens hem d'imaginar que volem trobar el camí més curt (de P a Q) per anar d'un objecte a un altre, triant un punt P del primer objecte i un punt Q del segon.

Distància d'un punt P a una recta r

- Si P pertany a r , aleshores la distància val 0.
- Si P no pertany a r , aleshores Q és el punt que fa que $\vec{PQ}$ sigui ortogonal a r . De les diverses maneres en què es pot trobar aquest punt Q , una molt interessant és la següent: trobem el pla π ortogonal a r que passi per P (i no serà difícil ja que el vector director de la recta és igual al vector normal del pla). Ara fem la intersecció entre π i r i ja tenim el punt Q .

Distància d'un punt P a un pla π

- Si P pertany a π , aleshores la distància val 0.
- Si P no pertany a π , aleshores Q és el punt que fa que $\vec{PQ}$ sigui ortogonal a π . De manera semblant a com hem fet amb la distància entre punt i recta, podem construir la recta perpendicular a π que passa per P , ja que el vector director d'aquesta recta és el vector normal del pla. Trobarem Q i calculem la distància.

Existeix una fórmula molt útil per calcular la distància d'un punt a un pla. Sigui $P(p_1, p_2, p_3)$ un punt i $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, aleshores, la distància de P a π és:

$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C \cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(Nota: a selectivitat, en els darrers cursos, han escrit aquesta fórmula dins del problema per si algú no l'havia estudiat! Però millor la memoritzeu).

Distància entre dos plans

Tenim un pla π_1 del que triarem un punt P i un altre pla π_2 del que triarem Q .

- Si els plans són coincidents o secants, aleshores la distància val 0.
- Si els plans són paral·lels, aleshores podem agafar com a P un punt qualsevol de π_1 i ara podem fer la distància de P a π_2 (distància de punt a pla, ja estudiada, podent usar si volem la fórmula).

Distància d'una recta a un pla

Tenim una recta r de la que triarem un punt P i un pla π del que triarem Q .

- Si la recta i el pla són secants o la recta està continguda dins del pla, aleshores la distància val 0.
- Si la recta i el pla són paral·lels, podem triar com a P un punt qualsevol de r i fer la distància d'aquest punt al pla π tal i com ja s'ha explicat (distància de punt a pla).

Distància entre dues rectes

Hem de triar un punt P de la recta r i un punt Q de la recta s .

- Si les rectes són coincidents o secants, aleshores la distància val 0.
- Si les rectes són paral·leles, el que volem és que el vector $\vec{PQ}$ sigui perpendicular a r i a s . Hi ha diverses maneres de fer-ho, una interessant és la següent:
 - Agafem un punt qualsevol P de r .
 - Construïm el pla perpendicular a r que passa per P (novament serà fàcil, el vector director de la recta és el vector normal del pla).
 - Tallem el pla anterior amb la recta s i obtindrem Q .
- El cas en què les rectes r i s s'encreuen és el cas més complex si ho volem fer pas a pas, però existeix una fórmula que ens facilitarà molt el càlcul. Sigui $r : A + \lambda \vec{u}$ i $s : B + \mu \vec{v}$ aleshores la distància entre les dues rectes és:

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Exercicis

- [36] Determineu la distància del punt $P(-3, 5, 4)$ al pla $\pi : -x + 2y + 2z + 1 = 0$.
- [37] Determineu la distància del punt $P(-1, 3, 1)$ a la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = -z$.
- [38] Determineu la distància de la recta $r : \frac{x-3}{2} = \frac{2y-1}{6} = \frac{z}{-4}$ al pla $\pi : x - 2y - z + 3 = 0$.
- [39] Determineu un punt de la recta $r : \begin{cases} x - z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$ que es trobi a distància $\sqrt{6}$ unitats del pla $\pi : x - y - 2z + 5 = 0$.
- [40] Determineu el punt del pla $\pi : x - y - z - 3 = 0$ més pròxim al punt $A(0, -1, 1)$ i la distància que els separa.
- [41] Donats la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ i els plans $\pi_1 : 3x + 4y = 1$ i $\pi_2 : 4x - 3z = 1$, determineu els punts de la recta que equidisten dels dos plans.

Solucions

- [36] $\frac{22}{3}u$ [37] $\sqrt{\frac{3}{2}}u$ [38] $\frac{5}{\sqrt{6}}u$ [39] $(4, -1, 2)$ i $(-8, 23, -10)$
- [40] $(1, -2, 0)$; distància $\sqrt{3}u$ [41] $(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8})$ i $(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10})$