

Angles

Ja he dit diverses vegades que tenim un *transportador d'angles* matemàtic molt interessant: el producte escalar. Dit d'una altra manera, podem calcular l'angle de dos vectors usant el producte escalar.

Ara el que volem fer és calcular els angles que formen rectes, plans,... Quina serà la clau? Doncs triar un vector de cada objecte que el representi i tot seguit aplicar el producte escalar.

Visualitzeu dues rectes que es tallen en un punt. Segur que sou capaços de veure que l'angle que formen aquestes dues rectes és l'angle que formen els dos vectors directors. Podeu començar a intuir que el vector que millor representa a una recta és el seu vector director. I és cert. Però, a més, saber la posició relativa també ens pot ajudar. Per exemple, si les rectes són coincidents quin angle creieu que formaran? A que no us cal usar la fórmula del producte escalar? Què heu contestat? Un angle de 0° ? I perquè no un angle de 180° ? Tots dos serien correctes, però perquè tothom contesti (en tot el món) sempre el mateix, sempre agafarem el valor més petit.

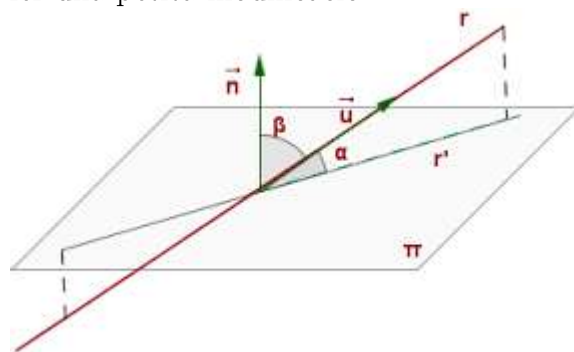
I si les rectes són paral·leles? Tampoc ens cal la fórmula: agafem els vectors directors de la recta, que són lliures, els movem fins que coincideixin i obtenim el mateix que en el cas de rectes coincidents.

Crec que ja podem formular el primer resultat d'angles:

L'Angle que formen dues rectes és l'angle que formen els seus vectors directors. Si les rectes són paral·leles o coincidents formaran un angle de 0° .

Quan un, o tots dos, dels elements geomètrics siguin plans, quin vector agafarem com a representant del pla? El pla té dos vectors directors, amb quin ens quedem? Doncs amb cap d'aquests, amb un molt més interessant: el vector normal del pla. Però alerta, amb el vector normal del pla no ens quedarà exactament l'angle que volem, haurem de fer una petita modificació.

Si us fixeu en la figura de la dreta, tenim un pla π i una recta r . L'angle entre la recta i el pla és α , però quan agafo el vector director de la recta i el vector normal del pla, el que trobo és l'angle β . Però podeu observar que si trobem β és fàcil trobar α ja que tots dos junts formen un angle recte (són complementaris).



Anem a formular tot això en un resultat:

L'angle que formen una recta i un pla és l'angle complementari de l'angle que formen el vector director de la recta i el vector normal del pla (agafant el resultat més petit).

L'últim cas és l'angle entre dos plans. Ja sabem quins vectors agafarem, els vectors normals de cada pla. Haurem de modificar el resultat obtingut? No! Cada vector normal s'ha *mogut* 90° respecte el seu pla i per tant l'angle entre aquests vectors és el mateix que l'angle entre els dos plans. Enunciem-ho:

L'angle que formen dos plans és l'angle que formen els seus vectors normals (agafant el resultat més petit).

Exercicis

[42] Determineu els angles que formen els parells de rectes següents:

$$(a) \ r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{i } s : \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{2}$$

$$(b) \ \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases} \quad \text{i } s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

[43] Calculeu l'angle que formen les parelles de recta i pla següents:

$$(a) \ \pi : x - 3y - z = 6 \text{ i } r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-4}$$

$$(b) \ \pi : 2x + 2y + 2z = -3 \text{ i } r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 8 \\ -2x + y + z = 4 \end{cases}$$

[44] Trobeu l'angle dels parells de plans següents:

$$(a) \ \pi_1 : -x + 5y + 3z = -1 \text{ i } \pi_2 : 3x + 5y + 7z = 9$$

$$(b) \ \pi_1 : -4x + 12y - 28z = -13 \text{ i } \pi_2 : \begin{cases} x = -2 + t + 3s \\ y = 2 - 2t + s \\ z = 1 - t \end{cases}$$

[45] Determineu m perquè la recta $r : x = \frac{y}{m} = -z$ i el pla $\pi : x - z = 0$ formin un angle de 30° .

[46] Calculeu el valor de m perquè les rectes r i s siguin secants:

$$r : \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{i } s : (-1 + 2\lambda, -1 + \lambda, m - 2\lambda)$$

Per a aquest valor de m trobeu l'angle que formen les dues rectes i el seu punt d'intersecció.

Solucions

$$[42] \quad (a) \ 67,7^\circ \qquad (b) \ 17,7^\circ$$

$$[43] \quad (a) \ 0^\circ \qquad (b) \ 90^\circ$$

$$[44] \quad (a) \ 37,1^\circ \qquad (b) \ 0^\circ$$

$$[45] \ m = \pm\sqrt{6}$$

$$[46] \ m = -1; \text{ formen un angle de } 45^\circ; \text{ el punt intersecció és } (-1, -1, -1)$$