

Selectivitat: Geometria a l'espai

- [47] Un dron es troba en el punt $P = (2, -3, 1)$ i volem dirigir-lo en la línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi : 3x + 4z + 15 = 0$.

- Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins arribar al pla?
- Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.

Nota: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

- [48] Sigui la recta $r : \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi : x - z = 3$.

- Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que talla en el mateix punt en què el talla la recta r .
- Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π .

Nota: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

- [49] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

- Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
- Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1 : x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ i $\pi_3 : 4x + 3ay + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a .

- [50] Sigui P , Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX , OY i OZ , respectivament.

- Calculeu els punts P , Q i R , i el perímetre del triangle de vèrtexs P , Q i R .
- Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P , Q i R .

Nota: Per a calcular l'àrea d'un triangle definit pels vectors v i w podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2} \|v \times w\|$, en què $v \times w$ és el producte vectorial dels vectors v i w .

- [51] Sigui r la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

- Trobeu l'equació paramètrica de la recta r .
- Calculeu tots els punts de la recta r que estan a la mateixa distància dels plans $\pi_1 : x + y = -2$ i $\pi_2 : x - z = 1$.

Nota: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

- [52] Considereu els punts $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ i la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

- (a) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta r .
- (b) Donats el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ i el pla que passa per P , Q i R , trobeu m perquè siguin paral·lels i no coincidents.

53 Considereu el pla que té com a vectors directors $u = (-1, 3, 2)$ i $v = (2, 1, 0)$ i que passa pel punt $A = (1, 0, 3)$.

- (a) Calculeu l'equació de la recta que és perpendicular al pla i passa pel punt A .
- (b) Calculeu la distància del punt $P = (1, 5, 0)$ al pla.

Nota: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

54 Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ i $C = (1, 0, 0)$ i la recta $r : x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

- (a) Trobeu el punt d'intersecció de la recta r amb el pla que passa pels punts A , B i C .
- (b) Trobeu els punts P de la recta r per als quals el tetraedre de vèrtexs P , A , B i C té un volum de $2u^3$.

Nota: El volum d'un tetraedre de vèrtexs P , Q , R i S es pot calcular amb l'expressió $\frac{1}{6}|\det(\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS})|$.

55 Sigui el pla d'equació $\pi : x + y - z = 0$ i el punt $P = (2, 3, 2)$.

- (a) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π .
- (b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) dels dos plans paral·lels a π que estan a distància $\sqrt{3}$ del punt P .

Nota: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

56 Siguin les rectes $r_1 : x - 1 = \frac{y - 2}{-1} = z - 5$ i $r_2 : (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

- (a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que conté la recta r_1 i és paral·lela a la recta r_2 .
- (b) Digueu quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2 . Amb les rectes r_1 i r_2 de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2 .

57 Considereu els plans $\pi_1 : 5x - y - 7z = 1$ i $\pi_2 : 2x + 3y + z = 5$.

- (a) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per l'origen de coordenades i és perpendicular als plans π_1 i π_2 .
- (b) Calculeu l'angle que formen els plans π_1 i π_2 .

58 Considereu el pla $\pi : x + y + z = 1$ i la recta r que passa pels punts $P = (0, 0, 6)$ i $Q = (1, 2, 3)$.

- (a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π .

- (b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π ,

Nota: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

59 A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta $r : \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ i el punt $P = (0, 1, -1)$.

- (a) Calculeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π perpendicular a la recta r i que passa pel punt P .
 (b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla $x + y + z = -3$.

60 Siguin les rectes de $\mathbb{R}^3$ $r : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ i $s : x + 1 = \frac{y - 2}{2} = z - 1$.

- (a) Comproveu que són paral·leles.
 (b) Calculeu l'equació vectorial del pla que les conté.

61 Sigui $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals.

- (a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre a , i interpreteu el resultat geomètricament.
 (b) Per a $a = 1$ trobeu la forma paramètrica del pla solució i doneu un punt i dos vectors directores d'aquest pla.

62 Siguin la recta $r : (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.

- (a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P .
 (b) Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q .

63 Responen a les qüestions següents:

- (a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt de coordenades $(0, 0, 1)$ i és perpendicular als plans $3x + y - z = 1$ i $x + y + 2z = 5$.
 (b) Supposeu que un pla π_1 és perpendicular a un segon pla π_2 i que el pla π_2 és a la vegada perpendicular a un tercer pla π_3 . Expliqueu raonadament si necessàriament els plans π_1 i π_3 han de ser perpendiculars entre ells.

64 A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$ i el pla π d'equació $2x - y + z = -2$.

- (a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π .
 (b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π .

65 Siguin a $\mathbb{R}^3$ el pla d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

- (a) Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π .
 (b) Si r és la recta dels punts P que té per equació $P = B + \lambda v$, en que λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments $\overline{AP}$ pertanyen al pla π .

- [66] Siguin les rectes $r : (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s : \frac{x-3}{2} = y-5 = z+2$.
- Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.
 - Determineu la posició relativa de les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s .
- [67] Sigui r la recta de l'espai que té per equació $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades $(6, 0, -1)$.
- Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r .
 - Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r .
- [68] Considereu a $\mathbb{R}^3$ la recta que té per equació $r : (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans π_1 i π_2 d'equacions $\pi_1 : x + 2y + 2z = -1$ i $\pi_2 : x - 2y + 2z = -3$, respectivament.
- Determineu la posició relativa de π_1 i π_2 .
 - Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2 .
- [69] Siguin el punt $P = (2, 0, 2)$ i el pla π d'equació $x - y + z = 1$.
- Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla π .
 - Calculeu la distància del punt P al pla π .
- [70] Siguin a $\mathbb{R}^3$ el punt $P = (2, 3, 3)$ i la recta $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.
- Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r .
 - Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r .
- [71] A l'espai tridimensional considereu la recta $r : (x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ i els plans $\pi_1 : x + y + z = -1$ i $\pi_2 : (x + y + z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.
- Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π_2 .
 - Trobeu els dos punts de la recta r que equidisten dels plans π_1 i π_2 .
- [72] Siguin els plans de $\mathbb{R}^3$ $\pi_1 : -y + z = 2$, $\pi_2 : -2x + y + z = 1$ i $\pi_3 : 2x - 2z = -1$.
- Calculeu la posició relativa dels tres plans.
 - Comproveu que el pla π_3 és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 .
- [73] Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.
- Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r : (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$
 - Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi : x + y + z = 3.$$

74 Sigui r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r : \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i $s : (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.
- (b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.

75 Siguin els punts $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ i $R = (0, 1, 1)$ i el pla $\pi : x + y + z = 4$.

- (a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pels punts P , Q i R .
- (b) Si S és un punt de π , comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P , Q , R i S no depèn del punt S .

76 Donats els plans $\pi_1 : x - 4y + z = 2m - 1$ i $\pi_2 : 2x - (2m + 2)y + 2z = 3m + 1$,

- (a) Determineu els valors de m perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m .
- (b) Sigui el pla $\pi : 3x - 2y + 3z = 8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta r definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m = 1$.

77 Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ que tenen les equacions següents:

$$r : x + 5 = y - 5 = \frac{z - 3}{2} \quad i \quad s : \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{-1}$$

- (a) Estudieu el paral·lisme i la perpendicularitat de les rectes r i s .
- (b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s . Calculeu la distància entre la recta s i el pla π obtingut.

78 Donats els vectors $u = (2, -1, 0)$, $v = (-1, 3, 4)$ i $w = (0, 3a - 1, 4a)$,

- (a) Calculeu el valor del paràmetre a perquè els vectors u , v i w siguin linealment dependents.
- (b) Calculeu els valors del paràmetre a perquè un tetraedre d'arestes u , v i w tinguin un volum de $2/3$ d'unitats cúbiques.

79 Donats el pla $\pi : x + 2y - z = 3$ i la recta $r : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+m}{4}$,

- (a) Comproveu que el vector característic (o normal) de π i el vector director de r són perpendiculars.
- (b) Estudieu la posició relativa de π i de r en funció del paràmetre m .

80 Donats el pla $\pi : 2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

- (a) Trobeu l'equació continua de la recta que passa per P i és perpendicular a π .
- (b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P .

Solucions

- [47] (a) $(x, y, z) = (2 + 3t, -3, 1 + 4t)$ amb $t \in \mathbb{R}$; recorrerà 5 u.
(b) $(1, -3, -3)$
- [48] (a) $(x, y, z) = (2 + t, 0, -1 - t)$ amb $t \in \mathbb{R}$
(b) $(2, -4, -5)$ i $(2, 4, 3)$
- [49] (a) $a \neq 0$ i $a \neq -1$
(b) Si $a \neq 0$ i $a \neq -1$ els tres plans es tallen en un punt; si $a = 0$ tenim tres plans que es tallen dos a dos en rectes paral·leles; si $a = -1$ els tres plans es tallen en una recta.
- [50] (a) $P = (4, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$ i $R = (0, 0, 2)$; perímetre de 10,8 u.
(b) $\sqrt{21} \text{ u}^2$.
- [51] (a) $(x, y, z) = (t, 1, 1 - 2t)$ amb $t \in \mathbb{R}$ (b) $(5/2, 1, -4)$ i $(-1/4, 1, 3/2)$.
- [52] (a) $5x + y - 6z = 7$ (b) $m = -3$
- [53] (a) $(x, y, z) = (1, 0, 3) + \lambda \cdot (-2, 4 - 7)$ (b) 4,94 u.
- [54] (a) $(0, 1, 0)$ (b) $(3, 4, 6)$ i $(-3, -2, -6)$
- [55] (a) $(0, 1, 4)$ (b) $\pi_1 : x + y - z = 0$ i $\pi_2 : x + y - z = 6$.
- [56] (a) $x + 3y + 2z = 17$
(b) Les dues rectes són perpendiculars; no existeix cap pla que compleixi l'enunciat.
- [57] (a) $20x - 19y + 17z = 0$ (b) 90°
- [58] (a) Paral·lels (b) $\frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ u}$
- [59] (a) $2x - y + 2z = -3$ (b) $(-2, -1, -3)$
- [60] (a) Paral·lels (b) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(-3, 4, 2)$
- [61] (a) Si $a = 1$ els rangs coincideixen en 1 i per tant els tres plans són coincidents; Si $a = -2$ el rang del sistema és 2 i el de l'amplada 3 i per tant els tres plans no tenen cap punt en comú; Si $a \neq 1$ i $a \neq -2$ els dos rangs valen 3 i els tres plans es tallen en un punt.
(b) Un punt del pla és $(1, 0, 0)$ i els dos vectors directores són $(-1, 1, 0)$ i $(-1, 0, 1)$.
- [62] (a) $(x, y, z) = (2, 1, 1) + \lambda(1, 7, 4)$ (b) $(9/2, -1/2, -1)$
- [63] (a) $3x - 7y + 2z = 2$ (b) .
- [64] (a) Paral·lels (b) $\frac{5\sqrt{6}}{6} \text{ u}$
- [65]

- [66] (a) No són ni paral·leles ni coincidents.
 (b) Es tallen en el punt $(1, 4, -3)$; $(x, y, z) = (1 + \lambda, 4 + \lambda, -3 - 3\lambda)$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [67] (a) $2x - y + z = 11$
 (b) $(x, y, z) = (6 + 2\lambda - 5\mu, -\lambda - 3\mu, -1 + \lambda + \mu)$
- [68] (a) Paral·lels
 (b) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ u
- [69] (a) $(x, y, z) = (2 + \lambda, -\lambda, 2 + \lambda)$ (b) $\sqrt{3}$ u
- [70] (a) $(x, y, z) = (2 + \lambda - \mu, 3 + \lambda - \mu, 3 + \lambda)$ (b) $x + y + z = 8$
- [71] (a) $x + y - z = 3$ (b) $(13, -5, -2)$ i $(-1, 2, 5)$
- [72] (a) Els tres plans no tenen cap punt en comú i es tallen dos a dos en una recta.
 (b)
- [73] (a) $(3, 0, 5)$ (b) $(-1, 0, 1)$
- [74] (a) (b) $14x - 2y - 10z = 3$
- [75] (a) $x + y + z = 2$ (b) .
- [76] (a) $m \neq 3$ (b) Paral·lels
- [77] (a) No són ni paral·leles ni coincidents. (b) $-7x + 5y + z = 63$; distància de $5\sqrt{3}$ u.
- [78] (a) $a = 2$ (b) $a = 1$ i $a = 3$
- [79] (a) (b) Si $m = 2$ la recta està continguda en el pla;
 si $m \neq 2$ paral·lels.
- [80] (a) $\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}$ (b) $(2, -1, 1)$