

Selectivitat: Aplicacions de les derivades

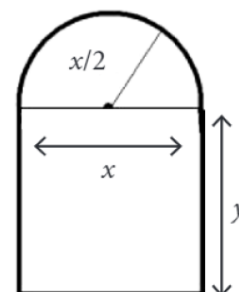
- 38 Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.
- 39 Considereu la funció $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.
- Calculeu-ne el domini i estudeu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
 - Observeu que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ i $f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval per l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
- 40 Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m^2 . Sabem que el preu de la fusta és de $7,5 \text{ €/m}^2$ per als costats horitzontals i de $12,5 \text{ €/m}^2$ per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
- 41 Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.
- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.
 - Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.
- 42 Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.
 - Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim i un mínim relatiu o un punt d'inflexió.
- 43 Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.
- Calculeu els valors dels paràmetres a , b i c , sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 0$ és la recta $y = x + 3$.
 - Per als valors $a = 2$, $b = 1$ i $c = 3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los.
- 44 Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.
- Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$.
 - Per al cas $a = 3$ i $b = 5$, calculeu l'asímtota horitzontal de la funció f quan x tendeix a $+\infty$.
- 45 Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k :
- Calculeu el domini i les asímtotes de la funció.
 - Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.
- 46 Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3 . Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2 , però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.
- Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$.
 - Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.
- 47 Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^{x-1}$.
- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

(b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

48 Responen a les qüestions següents:

- (a) Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
- (b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

49 La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçada de cada columna.



- (a) Comproveu que la funció $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.
- (b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

50 Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

- (a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.
- (b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

51 Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

- (a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval $[0, 2]$.
- (b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval $[0, 2]$ i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

52 Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

- (a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x , és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.
- (b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

53 Un nedador és al mar en un punt N , situat a 3 km d'una platja recta, i just davant d'un punt S , situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A , situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S , de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S . El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

- (a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S , demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{6 - x}{5}$.
- (b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A , passant per P . Quin és el valor d'aquest temps mínim?

54 Considereu la funció $f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$.

- (a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f .
- (b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y = -5x + 4$.

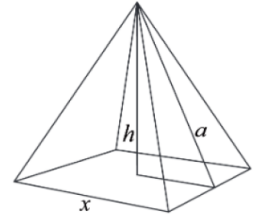
55 Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax} + b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x + 4}$.

- (a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g .

- (b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x = 0$.

56 Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Dispossem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.

- (a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas, $V(x) = \frac{x\sqrt{(9 \times 10^4 - x^4)}}{6}$.
- (b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

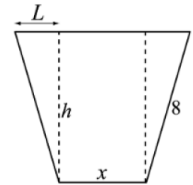


57 Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta $r: y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r . Calculeu el valor dels paràmetres a , b i c .

58 Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.

- (a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal):
- (b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

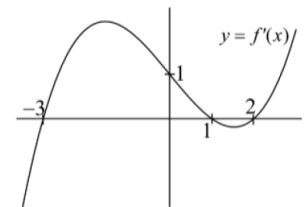
$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$



- (c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

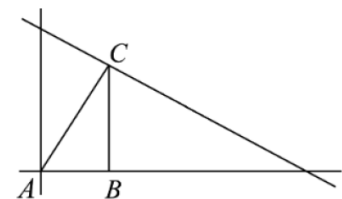
59 La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.

- (a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
- (b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.



60 Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B .

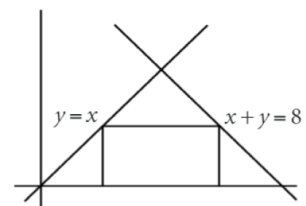
- (a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$.
- (b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.



61 Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = x; x + y = 8; y = 0$$

i té un costat sobre la recta $y = 0$. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.



62 Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,

- (a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.
- (b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

63 Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40 - 5x)/(10 - x)$ tones d'un producte B . La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100 € per tona i el del producte B és 250 € per tona.

- (a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.
- (b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

64 Sigui $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ quan $a \neq 0$.

- (a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 2$.
- (b) Quan $a = 2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

65 Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

- (a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a , b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.
- (b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
- (c) Determineu la relació entre els paràmetres a , b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x = -2$.
- (d) Calculeu el valor dels paràmetres a , b i c perquè es compleixin les tres propietats anterior alhora.

66 Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

- (a) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x + 3y = 12$.
- (b) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

67 Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y la seva altura.

- (a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y .
- (b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.

68 Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

- (a) Trobeu la relació existent entre els paràmetres a , b i c sabent que es compleix que $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.
- (b) Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors por tenir $P'(3/2)$.

69 Sigui $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$. Donades les rectes $r_1 : y = x + 2$ i $r_2 : y = 7x - 2$:

- (a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y = f(x)$ en algun punt
- (b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.

70 Considereu la funció real de variable real $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$

- (a) Trobeu-ne el domini.
- (b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.
- (c) Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.

- 71 Donats la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i el punt $A(2, 0)$:
- (a) Trobeu la funció que expressa la distància del punt A a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.
 - (b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a A .
- 72 Considereu la funció polinòmica de tercer grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).
- (a) Trobeu els valors de a , b , c i d per als quals $f(x)$ talla l'eix OX en els punts $x = 0$ i $x = 1$ i presenta un mínim relatiu en el punt $x = 0$.
 - (b) Feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat.

Solucions

- 38 Les dimensions són de $4\sqrt{30}$ cm per $5\sqrt{30}$ cm.
- 39 (a) $\text{Dom}f(x) = \mathbf{R} - \{1\}$. Asíptota vertical en $x = 1$. (b)
- 40 Les dimensions han de ser de $\frac{\sqrt{30}}{3}$ m per $\frac{\sqrt{30}}{5}$ m i el cost seria de 54,77 euros.
- 41 (a) $y = 1$ (b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$
- 42 (a) $9x + 27y = 1$
- (b) Màxim relatiu en $(0, 0)$ i mínim relatiu en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$. Punt d'inflexió en $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$
- 43 (a) $a = 2$, $b = 1$ i $c = 3$
- (b) En $x = 1$ hi ha un mínim relatiu i en $x = 1/3$ hi ha un màxim relatiu.
- 44 (a) $a = 1$ i $b = 2$ (b) $y = 0$
- 45 (a) Si $k < 0$ el $\text{Dom}f(x) = \mathbf{R}$, no té cap asíptota vertical i té una asíptota horitzontal en $y = 0$; si $k > 0$ el $\text{Dom}f(x) = \mathbf{R} - \{\pm\sqrt{k}\}$, tindrà dues asíptotes verticals a $x = -\sqrt{k}$ i $x = \sqrt{k}$ i una asíptota horitzontal a $y = 0$.
- (b) Té un màxim relatiu en $\left(0, -\frac{1}{k}\right)$.
- 46 (a) (b) 4 cm de base per 5 cm d'altura.
- 47 (a) $y = 2x - 1$
- (b) La funció és decreixent en $(-\infty, -1)$ i creixent en $(-1, \infty)$
- 48 (a) Màxim relatiu en $(1, 1)$, mínim relatiu en $(2, 0)$ i punt d'inflexió en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- 49 (a)
- (b) $x = \frac{40}{\pi + 4}$ m i $y = \frac{20}{\pi + 4}$ m.
- 50 (a) $y = 2 - x$
- (b) Hi ha un mínim relatiu en $x = 2$, un màxim relatiu en $x = 2/3$ i un punt d'inflexió en $x = 4/3$.
- 51 (a)
- (b) Mínim absolut en $(0, -1)$ i màxim absolut en $(2, e^2 - 4)$.

- 52 (a)
(b) Quadrat de costat $\sqrt{2}$ u i la seva superfície serà de 2 u^2 .
- 53 (a)
(b) $x = 2,25$ km i el temps mínim serà de 2 hores.
- 54 (a) Asíptota vertical en $x = 2$ i asíptota horitzontal en $y = 1$.
(b) En $x = 1$ la recta tangent serà $y = -5x + 1$ i en $x = 3$ la recta tangent serà $y = -5x + 21$.
- 55 (a) $\text{Dom}g(x) = [-4/3, +\infty)$ i $\text{Rec}g(x) = [0, +\infty)$. (b) $a = 3$ i $b = 7$.
- 56 (a) (b) $x = 10\sqrt[4]{3}$
- 57 $a = 0$, $b = -2$ i $c = 1$.
- 58 (a) $L = x/2$ (b) (c) $x = 8\sqrt{2}$
- 59 (a) $y = x$
(b) En $x = -3$ hi ha un mínim relatiu, en $x = 1$ hi ha un màxim relatiu en $x = 2$ hi ha un mínim relatiu.
- 60 (a) (b) $B = (4, 0)$ i $C = (4, 2)$
- 61 Els quatre vèrtexs són $(2, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 2)$ i $(2, 2)$.
- 62 (a) $x = 3/2$ (b) $b = -9/4$
- 63 (a) (b) 5 tones de producte A i 3 tones de producte B .
- 64 (a) $a = 1$ (b) Mínim relatiu en $x = 0$ i màxim relatiu en $x = 1$.
- 65 (a) $b = 2a - 3$ (b) $a = 0$ (c) $4a - 2b + c - 8 = 0$ (d) $a = 0$, $b = -3$ i $c = 2$.
- 66 (a) (b) (c) 1,5 cm de base i 2 cm d'altura.
- 67 (a) (b)
- 68 (a) $b = -3a$ i $c = 2a$. (b) $P'(3/2) = 0$
- 69 (a) (b) $(1, 5)$
- 70 (a) $\text{Dom}(f) = \mathbf{R} - \{\pm 1\}$
(b) Asíptota vertical en $x = 1$ i en $x = -1$; asíptota obliqua en $y = 2x$.
(c) La funció és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, decreixent en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$; té un màxim relatiu en $x = -\sqrt{3}$ i un mínim relatiu en $x = \sqrt{3}$.
- 71 (a) $m = 3/2$ (b) Els punts són $(-1, 1)$ i $(1/3, 31/27)$
- 72 (a) $b = -a$ i $c = d = 0$ (b)