

Càlcul integral

1 Trobeu la primitiva de les següents funcions:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\int (\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 6x - 1) dx$ | (i) $\int e^{2x+3} dx$ | (q) $\int \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x - 9} dx$ |
| (b) $\int (x-1)^3 dx$ | (j) $\int (5e^{\frac{x}{2}} + 2^{2x}) dx$ | (r) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ |
| (c) $\int 2\sqrt{3x} dx$ | (k) $\int \cos(2x) dx$ | (s) $\int (\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}) dx$ |
| (d) $\int (\frac{2}{\sqrt{2x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{4x}}) dx$ | (l) $\int 4 \sin(x + \pi) dx$ | (t) $\int \frac{-2}{\sqrt{3-x^2}} dx$ |
| (e) $\int \frac{4}{x-2} dx$ | (m) $\int 3 \sec^2(\frac{1}{5}x) dx$ | (u) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$ |
| (f) $\int (\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}) dx$ | (n) $\int \frac{5}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx$ | (v) $\int \frac{3+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| (g) $\int \frac{1}{(x+4)^2} dx$ | (o) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | (w) $\int \frac{x-1}{x^2+1} dx$ |
| (h) $\int (\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2}) dx$ | (p) $\int \frac{1}{9x^2+1} dx$ | (x) $\int \frac{8}{x^2+4} dx$ |

2 Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = \frac{-x}{1-x^2}$ la gràfica de la qual passa pel punt $(\sqrt{2}, 3)$.

3 Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = \frac{1-\sin x}{2x+2\cos x}$ si sabeu que passa pel punt $(0, 2)$.

4 La derivada segona d'una funció és $f''(x) = 6x + 2$. Trobeu la seva expressió algebraica si sabeu que té un mínim relatiu en el punt $(1, 3)$.

5 Trobeu la primitiva de les següents funcions:

- | | | |
|--|--------------------------------------|--|
| (a) $\int x^3 \cdot e^{x^4+1} dx$ | (f) $\int \cos x \sin^3 x dx$ | (l) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx$ |
| (b) $\int \frac{2}{x \cdot \ln x} dx$ | (g) $\int x\sqrt{x+1} dx$ | (m) $\int e^x \sqrt{(e^x+1)^3} dx$ |
| (c) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$ | (h) $\int \sin x e^{\cos x} dx$ | (n) $\int \cos^3 x dx$ |
| (d) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ | (i) $\int (x^2+1)e^{x^3+3x} dx$ | (o) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ |
| (e) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | (j) $\int \frac{2}{4+x^2} dx$ | (p) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-3e^x+2} dx$ |
| | (k) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ | |

6 Trobeu la primitiva de les següents funcions:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|--|
| (a) $\int x^3 \ln x dx$ | (d) $\int \arctan x dx$ | (g) $\int \frac{x}{e^x} dx$ |
| (b) $\int \ln(2x+1) dx$ | (e) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ | (h) $\int (x^2-5) \cos x dx$ |
| (c) $\int e^{-x} \sin 2x dx$ | (f) $\int x \sin(2x) dx$ | (i) $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |

7 Trobeu la primitiva de les següents funcions:

- | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|---|
| (a) $\int \frac{3}{x^2-3x+2} dx$ | (c) $\int \frac{2}{x^3+x^2} dx$ | (e) $\int \frac{x+6}{x^4-3x^3+x^2+3x-2} dx$ |
| (b) $\int \frac{x-3}{x^2-4} dx$ | (d) $\int \frac{2}{x^4-x^2} dx$ | |

8 Trobeu la primitiva de les funcions següents:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\int \frac{3x^2-5x+7}{x^3-4x^2+4x} dx$ | (j) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx$ | (s) $\int \sin^2 x dx$ |
| (b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^4}} dx$ | (k) $\int \frac{1+e^{3x}}{e^{2x}} dx$ | (t) $\int \cos^2 x dx$ |
| (c) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ | (l) $\int \sqrt{e^x-1} dx$ | (u) $\int \sin x \cos x dx$ |
| (d) $\int \frac{1}{x^2-7x+10} dx$ | (m) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$ | (v) $\int 2^x \cos x dx$ |
| (e) $\int \frac{2^{3x}}{2^x-4} dx$ | (n) $\int (x-2)e^{3x} dx$ | (w) $\int \frac{\ln x+3}{x(\ln x-1)} dx$ |
| (f) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx$ | (o) $\int \frac{7}{x\sqrt[3]{\ln x}} dx$ | (x) $\int \cos(\ln x) dx$ |
| (g) $\int \frac{\sin 2x+\cos x}{\cos x} dx$ | (p) $\int \frac{(\ln x)^2+x}{x} dx$ | (y) $\int \cos^3 x dx$ |
| (h) $\int e^{x^2-5x}(2x-5) dx$ | (q) $\int (\ln x)^2 dx$ | (z) $\int x \sin(\ln x) dx$ |
| (i) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$ | (r) $\int \frac{5e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1} dx$ | |
-

- 9 Determineu, en funció del paràmetre a , la integral següent:

$$\int \frac{3}{x^2 - (a+2)x + 2a} dx$$

- 10 Calculeu:

- | | | |
|----------------------------------|--|--------------------------------|
| (a) $\int_0^4 (2+x) dx$ | (e) $\int_1^9 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) dx$ | (i) $\int_0^\pi \cos^2 x dx$ |
| (b) $\int_{-3}^2 x^2 dx$ | (f) $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$ | (j) $\int_1^e \ln x^2 dx$ |
| (c) $\int_0^2 (x^2 - 3x + 5) dx$ | (g) $\int_0^1 (2e^x - 4x^2) dx$ | (k) $\int_0^2 3xe^x dx$ |
| (d) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$ | (h) $\int_{-1}^1 x-2 dx$ | (l) $\int_0^\pi e^x \cos x dx$ |

- 11 Calculeu la integral definida de la funció següent en l'interval $[-1, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 12 Trobeu el valor de a perquè es compleixi:

- | | |
|--|---------------------------------|
| (a) $\int_0^a (x+x^2) dx = 0$ | (c) $\int_{-2}^2 (4+ax) dx = 2$ |
| (b) $\int_a^0 x^2-1 dx = \frac{22}{3}$ | (d) $\int_0^3 (a+x^2) dx = 12$ |

- 13 Determineu l'àrea del recinte que delimiten les rectes $y = 2x + 6$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 3$.

- 14 Determineu l'àrea tancada per la corba $y = x^3 - x^2$ i l'eix d'abscisses.

- 15 La funció $f(x) = \ln x$, l'eix d'abscisses i la recta $x = e$ limiten un recinte finit en el pla. Trobeu-ne l'àrea.

- 16 Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$.

- 17 Considereu la funció $f(x) = \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}$. Trobeu l'àrea sota la corba en l'interval $[3, 4]$.

- [18] Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3 - 2x^2$ en el punt $x = -1$. Trobeu l'àrea del recinte que delimiten la gràfica de la corba i la recta tangent calculada.
- [19] Determineu el valor del paràmetre a perquè l'àrea tancada per la funció $f(x) = 2x + 1$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 1$ i $x = a$ sigui de 18 u^2 .
- [20] Sabem que l'àrea limitada per la corba de la funció $f(x) = -x^2 + 9$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -1$ i $x = a$ és de 24 u^2 . Calculeu el paràmetre a .
- [21] Trobeu l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 2x + 2$.
- [22] Obteniu l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions $f(x) = 2 + x - x^2$ i $g(x) = x^2 - 3x + 2$.
- [23] Calculeu l'àrea de la regió del pla tancada per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = (x-2)^2$ i l'eix d'abscisses.
- [24] Calculeu l'àrea de la regió limitada per la paràbola $y = x^2 + 4$ i les seves rectes tangent en els punts $x = -1$ i $x = 1$.
- [25] Considereu les funcions les expressions algebraiques de les quals són $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = x^3 + c$.
- (a) Trobeu els valors de a , b i c perquè les gràfiques de les funcions es tallin en el punt $P(1, 2)$ i en aquest punt tinguin la mateixa recta tangent.
- (b) Calculeu l'àrea de la regió del pla delimitada per totes dues funcions.
- [26] Trobeu el volum del cos de revolució generat en girar al voltant de l'eix d'abscisses la corba $y = \frac{x^2}{2} + 1$, entre les rectes $x = -1$ i $x = 2$.
- [27] Calculeu el volum de l'esfera generada per la semicircumferència de centre $(3, 0)$ i radi 2 en girar al voltant de l'eix d'abscisses.
- [28] Trobeu el volum del cos generat per la regió del pla limitada pels eixos de coordenades, la corba d'equació $y = e^{-x}$ i la recta $x = 3$, en girar al voltant de l'eix d'abscisses.
- [29] Calculeu la derivada de la funció $\int_0^x (\sin t + e^t) dt$.
- [30] Determineu els valors de x per als quals s'anul·la la derivada de la funció $F(x) = \int_2^{1-x^2} (4t^2 - 1) dt$.
- [31] Determineu els valors de x per als quals la funció $F(x) = \int_1^{x^2-1} (t^2 - 1) dt$ assoleix algun extrem relatiu i digues de quin tipus es tracta.

Solucions

- | | |
|--|---|
| [1] (a) $\frac{3x^4}{16} - x^3 + 3x^2 - x + C$ | (g) $-\frac{1}{x+4} + C$ |
| (b) $\frac{1}{4}(x-1)^4 + C$ | (h) $\frac{5}{x-3} - \frac{1}{(x+3)^2} + C$ |
| (c) $4x\sqrt{\frac{x}{3}} + C$ | (i) $\frac{1}{2}e^{2x+3} + C$ |
| (d) $2\sqrt{2x} + \frac{8\sqrt[4]{4x^3}}{3} + C$ | (j) $10e^{x/2} + \frac{2^{2x}}{2\ln 2} + C$ |
| (e) $4\ln(x-2) + C$ | (k) $\sin x + \cos x + C$ |
| (f) $\ln x - \frac{4x+3}{2x^2} + C$ | (l) $4\cos(x+\pi) + C$ |

(m) $15\operatorname{tg}(x/5) + C$

(s) $\arctan(x) - \frac{1}{x} + C$

(n) $15\operatorname{tg}(x/3) + C$

(t) $-2 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

(o) $3 \arcsin(x) + C$

(u) $2 \left(\ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \ln \left(\cos \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + C$

(p) $\frac{1}{3} \arctan(3x) + C$

(v) $3 \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + C$

(q) $\ln(2x^3 + x - 9) + C$

(w) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + C$

(r) $-\ln \cos(x) + C$

(x) $4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\boxed{2}$ $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + 3$

$\boxed{3}$ $\frac{1}{2} \ln(x + \cos(x)) + 2$

$\boxed{4}$ $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 6$

$\boxed{5}$ (a) $\frac{e^{x^4+1}}{4} + C$

(i) $\frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C$

(b) $x(\ln(x) - 1) + C$

(j) $\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

(c) $\frac{1}{4} \ln^2(x^2) + C$

(k) $\frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$

(d) $-2 \cos(\sqrt{x}) + C$

(l) $\frac{1}{5} \sin^{-1}(x^5) + C$

(e) $\frac{4}{3}(\sqrt{x} + 1)^{3/2} + C$

(m) $\frac{2}{5}(e^x + 1)\sqrt{(e^x + 1)^3} + C$

(f) $\frac{\sin^4(x)}{4} + C$

(n) $\frac{1}{12}(9 \sin(x) + \sin(3x)) + C$

(g) $\frac{2}{15}(3x - 2)(x + 1)^{3/2} + C$

(o) $\frac{1}{2}(x + \ln(\sin(x) + \cos(x))) + C$

(h) $-e^{\cos(x)} + C$

(p) $e^x - \log(1 - e^x) + 4 \log(2 - e^x)$

$\boxed{6}$ (a) $\frac{1}{16}x^4(4 \ln(x) - 1) + C$

(f) $\frac{1}{4}(\sin(2x) - 2x \cos(2x)) + C$

(b) $(x + \frac{1}{2}) \ln(2x + 1) - x + C$

(g) $-e^{-x}(x + 1) + C$

(c) $-\frac{1}{5}e^{-x}(\sin(2x) + 2 \cos(2x)) + C$

(h) $(x^2 - 7) \sin(x) + 2x \cos(x) + C$

(d) $(x \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)) + C$

(i) $x - \sqrt{1-x^2} \sin^{-1}(x) + C$

(e) $\frac{\ln^2(x)}{2} + C$

$\boxed{7}$ (a) $3 \ln(2 - x) - 3 \ln(1 - x) + C$

(b) $\frac{5}{4} \ln(x + 2) - \frac{1}{4} \ln(2 - x) + C$

(c) $2 \left(-\frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x + 1) \right) + C$

(d) $\frac{2}{x} + \ln(1 - x) - \ln(x + 1) + C$

(e) $\frac{1}{12} \left(\frac{42}{x-1} + 32 \ln(2 - x) - 27 \ln(x - 1) - 5 \ln(x + 1) \right) + C$

$\boxed{8}$ (a) $\frac{1}{4} \left(-\frac{18}{x-2} + 5 \ln(2 - x) + 7 \ln(x) \right) + C$

(f) $-2 \arctan \sqrt{1-x} + C$

(b) $\frac{1}{6} \arcsin(3x^2) + C$

(g) $x - 2 \cos x + C$

(c) $\frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2}x + \arcsin(x)) + C$

(h) $e^{x(x-5)} + C$

(d) $\frac{1}{3}(\ln(5 - x) - \ln(2 - x)) + C$

(i) $-\frac{4 \cos^2(\frac{x}{2})}{\sqrt{\cos(x)+1}} + C$

(e) $\frac{4^x + 2^{x+3} + 32 \ln(4-2^x)}{\ln(4)} + C$

(j) $\arcsin \ln x + C$

(k) $e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

(l) $2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) + C$

(m) $-\ln(2 - \sin^2(x)) + C$

(n) $\frac{1}{9}e^{3x}(3x - 7) + C$

(o) $\frac{21}{2} \ln^{2/3}(x) + C$

(p) $x + \frac{\ln^3(x)}{3} + C$

(q) $x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + C$

(r) $2\ln(1 - e^x) + 3\ln(e^x + 1) + C$

(s) $\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$

(t) $\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$

(u) $-\frac{\cos^2(x)}{2} + C$

(v) $\frac{2^x(\sin(x) + \ln(2)\cos(x))}{1 + \ln^2(2)} + C$

(w) $\ln(x) + 4\ln(\ln(x) - 1) + C$

(x) $\frac{1}{2}x(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))) + C$

(y) $\frac{1}{12}(9\sin(x) + \sin(3x)) + C$

(z) $-\frac{1}{5}x^2(\cos(\ln(x)) - 2\sin(\ln(x))) + C$

Selectivitat: Càlcul integral

9 Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, i la recta $x = e$.

- Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.
- Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

10 Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt de nombres reals
- Per al cas $n = -4$ i $m = -6$, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

11 Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable en tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

- Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
- Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f .

12 Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.

- Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.
- Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.

13 Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Calculeu el domini de la funció f , els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f .
- Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f , les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.

14 Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

- Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval $(0, 2)$. Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.
- A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.

15 Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 3 - x^2$.

- Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesianes i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.
- Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $y \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.

16 Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

(a) Calculeu $f''(2)$, $f'(2)$ i $f(2)$.

(b) Calculeu $\int_{-3}^2 f'(x) dx$.

17 Sigui la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

(a) Calculeu una primitiva de la funció.

(b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$.

18 Responen a les qüestions següents:

(a) Comproveu que la recta tangent a la corba $y = x^2$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és la recta $y = 4x - 4$ i calculeu els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.

(b) Calculeu l'àrea limitada per la corba de l'apartat anterior, la recta tangent en $x = 2$ i l'eix d'abscisses.

19 Sigui la funció $f(x) = \sin x$.

(a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

(b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són $y = x$ i $y = -x + \pi$, respectivament).

20 Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

(a) Calculeu les abscisses, en funció de k , dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.

(b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

21 Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x) = (x+1)e^x$ i que $f(0) = 2$.

(a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt de la corba d'abscissa $x = 0$.

(b) Calculeu l'expressió de $f(x)$.

22 Responen a les qüestions següents:

(a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

(b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.

23 Sigui f la funció $f(x) = x \cdot \sin x$. Calculeu la primitiva de la funció de f que passa pel punt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (unitats en radians).

24 Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.

25 De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

- té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$: - la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\frac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b .

26 Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$.

(a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

(b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a $14/3$.

27 La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

- (a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k .
- (b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6} u^2$.

28 Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

- (a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.
- (b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX .

29 Definim les funcions $f(x) = a(1-x^2)$ i $g(x) = \frac{x^2-1}{a}$, en què $a > 0$,

- (a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és:

$$\frac{4(1+a^2)}{3a}$$

- (b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

30 Sigui $f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2) dx$ per $a > 0$.

- (a) Comproveu que $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$.
- (b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.

31 Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2$ i $g(x) = 5 - 3x$.

32 Sigui $f(x) = \frac{8x^2}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limita per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

33 Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 6$.

- (a) Trobeu-ne els punts d'intersecció.
- (b) Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.
- (c) Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

34 Considereu la funció $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

- (a) Trobeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .
- (b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a .

35 Se sap que certa funció derivable $F(x)$ verifica les condicions següents:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \text{ i } F(1) = 3$$

- (a) Trobeu $F(x)$.
- (b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ i l'eix OX des de $x = 0$ fins a $x = 1$.

36 Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

37 Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}$:

- (a) Calculeu la integral $\int f(x) dx$
- (b) Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.