

Determinants

1 Calculeu els valors d'aquests determinants:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

2 Trobeu el valor de a que fa que el determinant s'anul·li:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$$

3 Resoleu aquestes equacions:

$$(a) \begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

$$(b) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(c) \begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

4 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, quin és el valor de cada un d'aquests determinants? Justifica les respostes:

$$(a) \begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$$

5 Trobeu el valor de les incògnites:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 7 \\ y & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

6 Calculeu els valors dels determinants següents:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

7 Justifiqueu, intentant aplicar les propietats dels determinants enlloc de fer el càlcul, que els determinants següents són nuls:

$$(a) \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

8 Si sabem que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calculeu els valors dels determinants següents:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

9 Trobeu x de manera que el determinant s'anul·li:

$$(a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

10 Calculeu la matriu inversa de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

11 Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comproveu que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ i calculeu $(B^2)^{-1}$.

12 Calculeu la inversa de les matrius següents:

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (f) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13 Resoleu les següents equacions matricials:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

14 Trobeu una matriu X que compleixi la condició $X \cdot B + B = B^{-1}$, essent $B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15 Resoleu, raonadament, l'equació matricial següent:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

16 Trobeu dues matrius X i Y d'ordre 2, tal que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases},$$

$$\text{essent } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

17 Discuti el rang de la següent matriu segons els valors del paràmetre a i, en cas d'existir, calculeu la matriu inversa quan $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & a-2 & a+1 \\ 1 & -1 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

18 Trobeu el determinant de la matriu X que verifica $A \cdot B - X = A^2$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solucions

[1] (a) 0 (b) 0 (c) -25 (d) 10

[2] (a) $a = 1$ (c) Cap
(b) $a = 1$ o $a = -3$ (d) $a = 0$ o $a = -3$ o $a = 2$

[3] (a) $x = 0$ (b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$ (c) $x = 0, x = 1$ i $x = -1$

[4] (a) -5 (b) 5 (c) -15 (d) 10 (e) -5 (f) 0

[5] (a) $x = 1, y = 2$ (b) $x = -10, y = 4$

[6] (a) -72 (b) -18 (c) 0 (d) 938

[7]

[8] (a) 5/2 (b) 5 (c) 10

[9] (a) $x = b, x = c$ (b) $x = 1, x = -1$ (c) $x = 0, x = 2, x = -2$ (d) $x = 1, x = -1$

[10]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad G^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & 2 & 6 \\ -6 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad H^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = I \quad K^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[11] $(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$

[12] (a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
(b) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[13] (a) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 6 & -7 \end{pmatrix}$

[14] $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [15] $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

[16] $X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

[17] Si $a = -1$ el rang val 2; si $a = 1$ el rang val 1; si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ el rang val 3. Per a $a = 0$ la matriu inversa a la donada és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[18] $|X| = 1$

Selectivitat: Matrius i Determinants

[31] Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

- (a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
- (b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.

[32] Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
- (b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.

[33] Siguin les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu $M \cdot N$ i comproveu que la matriu resultant no és invertible.
- (b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu $N \cdot M$ és invertible.

[34] Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

- (a) Hi ha algun valor de $a \in \mathbf{R}$ tal que A no tingui inversa per a aquest valor?
- (b) Calculeu la matriu inversa de A^2 per a $a = 0$.

[35] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de k la matriu $A + kI$ té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de $A - 2I$.
- (b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$, en què A^T és la matriu transposada de la matriu A .

[36] Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$, amb x i y nombres reals.

- (a) Comproveu que la matriu M és sempre invertible, independentment dels valors de x i de y .
- (b) Per a $x = 1$ i $y = -1$, calculeu M^{-1} .

[37] Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Comproveu que satisfan la igualtat $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 3.
- (b) Fent servir la igualtat anterior, trobeu la matriu inversa de A : A^{-1} .

[38] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu les potències A^2 , A^3 i A^6 .

(b) Calculeu la inversa de la matriu A^5 .

39 Responen a les qüestions següents:

- (a) Trobeu l'única matriu de la forma $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ a & 1/2 \end{pmatrix}$ que satisfà que $A^2 = A$, i comproveu que A i $A - I$ no són invertibles.
- (b) Justifiqueu raonadament que si A és una matriu quadrada d'ordre n diferent de la matriu nul·la, 0 , i de la matriu identitat I , i satisfà la igualtat $A^2 = A$, aleshores les matrius A i $A - I$ no són invertibles.

40 Responen a les qüestions següents:

- (a) Calculeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $A^2 + A = 2I$, en què I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Justifiqueu que si A és una matriu quadrada que compleix la igualtat $A^2 + A = 2I$, aleshores A és invertible, i calculeu l'expressió de A^{-1} en funció de les matrius A i I .

41 Sigui A una matriu quadrada d'ordre n que satisfà la igualtat $A \cdot (A - I) = I$, en què I és la matriu identitat.

- (a) Justifiqueu que la matriu A és invertible i que $A^{-1} = A - I$.
- (b) Calculeu el valor de a que fa que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la igualtat $A \cdot (A - I) = I$. Calculeu A^{-1} i comproveu que es correspon amb la matriu calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.

42 Responen a les qüestions següents:

- (a) Calculeu la matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 - A = I$, en què I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2 - A = I$.

43 Sigui A una matriu quadrada que compleix que $A^3 = I$, en què I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $A^{-1} = A^2$.
- (b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $A^3 = I$.

44 Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

- (a) Determineu per a quins valors de a existeix A^{-1} .
- (b) Calculeu A^{-1} per a $a = 0$.

45 Trobeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

46 Responen a les qüestions següents:

- (a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i $(A^{-1})^2 = I$.
- (b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.

47 Responen a les qüestions següents:

(a) Si A i B són dues matrius quadrades d'ordre n , demostreu que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA$$

(b) Si M_1 i M_2 són dues matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $M_1 \cdot M_2$ té també la mateixa forma i que $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

48 Considereu l'equació matricial $X \cdot A = B$, en què

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

(b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

49 Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{pmatrix},$$

on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

50 Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$. Sigui I la matriu identitat d'ordre 2.

(a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè es compleixi que $A^2 - 2A = I$.

(b) Calculeu la matriu inversa de la matriu A quan $a = -2$.

51 Sigui $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

(a) Què significa que la matriu B sigui la matriu inversa de A ?

(b) Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de A i la matriu transposada de A coincideixin.

NOTA: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

52 Sigui A una matriu quadrada d'ordre n de manera que $A^2 = O$, en què O és la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

(a) Comproveu que $(A + I_n)^2 = 2A + I_n$.

(b) Comproveu que les matrius $B = I_n - A$ i $C = A + I_n$ són l'una inversa de l'altra.

53 Contesteu les preguntes següents:

(a) Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

(b) Considereu les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p perquè $\det A = \det B$.

54 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

- (a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
- (b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades A i B del mateix ordre? Responen raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius A i B concretes.

55 Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu A^2 i A^3 .
- (b) Dedueïu el valor de A^{101} .

NOTA: Trebal·leu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.

56 Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $A^2 = A$.

57 Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Comproveu que compleix la igualtat $A^2 - 5A = I_2$, on I_2 és la matriu identitat d'ordre 2.
- (b) Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de A .
- (c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilitzant la matriu inversa de A .

58 Considereu la igualtat matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

- (a) Comproveu que les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.
- (b) En general, donades dues matrius qualssevol A i B quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

59 Siguin A , B i C matrius quadrades d'ordre n .

- (a) Expliqueu raonadament si és possible que $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ i $\det(A \cdot B) = 0$. Si és possible, poseu-ne un exemple.
- (b) Si sabem que $\det A \neq 0$ i que $A \cdot B = A \cdot C$, expliqueu raonadament si podem assegurar que $B = C$.

60 Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Calculeu el valor dels paràmetres a i b perquè $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

61 Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors del paràmetre a i b perquè la matriu tingui rang 1.

62 Sigui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Comproveu que la inversa de A és A^2 .
- (b) Comproveu també que $A^{518} = B$.

63 Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

- (a) Trobeu la matriu M , quadrada d'ordre 2, tal que $M \cdot A = B$
- (b) Comproveu que $M^2 = I_2$ (matriu identitat d'ordre 2) i deduiu l'expressió de M^n .

64 Considereu la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculeu A^2 i A^3 .
- (b) Determineu, raonadament, el valor de A^{60124} .

65 Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals.

- (a) Calculeu el valor de a i b per tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu A^3 i A^4 .
- (c) Si n és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de A^n en funció de n .