





ELECTRÒNICA DIGITAL

- 12.1 El sistema binari i l'àlgebra de Boole.
- 12.2 Funcions lògiques i esquemes electrònics.
- 12.3 Funcions canòniques.
- 12.4 Sistemes digitals.

Descomposició d'un nombre decimal

El nombre 2.364 consta de 4 xifres que representen el nombre d'unitats (4), desenes (6), centenars (3) i milers (2).

Si fem servir una mica de matemàtiques, podem descompondre aquest nombre tal com s'indica:

$$2.364 = 2 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

Una altra manera d'escriure la suma anterior és fent servir la potènciació:

$$2.364 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Sistema binari

El **sistema binari** és un sistema de numeració de base 2, és a dir, treballa amb dues xifres anomenades bits que són 0 i 1.

Un número en sistema binari qualsevol es representa com una combinació de productes entre els bits i potències de 2.

$$1101_{2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$$

$$10001_{2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$$

L'àlgebra que va crear el matemàtic anglès **George Boole** (1815-1864) només consta d'aquests dos elements anomenats **dígits binaris** o **bits** (*binary digits*). Boole no va arribar a saber mai les repercussions enormes de la seua àlgebra.

TAULA 1.1. Equivalència entre els setze primers nombres decimals i binaris

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binari	0	1	10	11	100	101	110	111
Decimal	8	9	10	11	12	13	14	15
Binari	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Hi ha una relació entre el nombre de bits que té un codi binari i la quantitat de nombres que es poden representar. Aquesta important relació és la següent:

$$N = 2^n$$

On N és la quantitat de nombres que es poden representar amb n bits.

Quants nombres podem representar amb vuit bits?

La resposta és 2^8 o, el que és el mateix, 256.

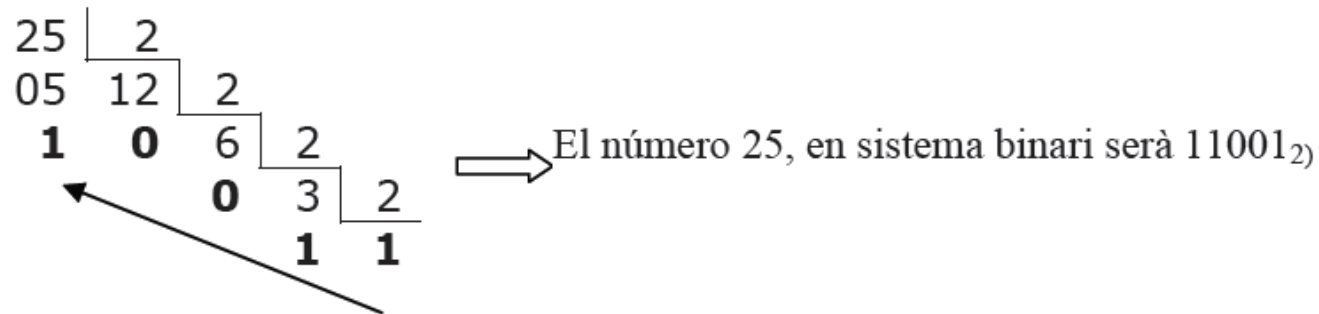
Com que el primer nombre és el 0 (00000000), l'últim que es podrà representar és el 255 (11111111).

Sistema binari

Conversió del sistema decimal al sistema binari.

Per passar de sistema decimal a sistema binari cal fer successives divisions del nombre que volem passar entre 2 fins aconseguir que el residu de la divisió sigui 1 o 0, és a dir, una divisió no decimal. El número en binari serà la seqüència 1, 0 que formen els residus de les successives divisions començant per l'últim quocient.

Exemple:



Conversió del sistema binari al sistema decimal.

Per passar un número de sistema binari a sistema decimal, s'escriu el número binari com a potències de base 2 i es fan les operacions pertinents.

Exemple:

$$10001_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 32 = 33$$

Per exemple, volem trobar l'equivalent binari del nombre decimal 89. Utilitzant la plantilla obtindrem el mostrat a la taula 1.6.

TAULA 1.6. Plantilla per convertir de decimal a binari.

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	0	1	1	0	0	1

El raonament que hem seguit per omplir la plantilla és el següent:

1. Comencem per la cel·la de més a l'esquerra (la de pes 128). Posem la cel·la a 0 perquè si la poséssim a 1, el nombre decimal obtingut seria, com a mínim, el 128 i ens passaríem de 89.
2. Continuem amb la següent cel·la a la dreta (la de pes 64). Aquesta la posem a 1 perquè amb 64 encara no arribem a 89.
3. Continuem amb la següent cel·la a la dreta (la de 32). Aquesta la posem a 0 perquè si la poséssim a 1, tindríem $64 + 32 = 96$ i ens passaríem de 89.
4. Continuem amb la següent cel·la a la dreta (la de pes 16). Aquesta la posem a 1 perquè així tenim $64 + 16 = 80$ i encara no arribem a 89.
5. Continuem amb la següent cel·la a la dreta (la de pes 8). Aquesta la posem a 1 perquè així tenim $64 + 16 + 8 = 88$ i encara no arribem a 89.
6. Continuem amb la següent cel·la a la dreta (la de pes 4). Aquesta la posem a 0 perquè si la poséssim a 1, tindríem $64 + 16 + 8 + 4 = 92$ i ens passaríem de 89.
7. Continuem amb la següent cel·la a la dreta (la de pes 2). Aquesta la posem a 0 perquè si la poséssim a 1, tindríem $64 + 16 + 8 + 2 = 90$ i ens passaríem de 89.
8. Continuem amb la següent cel·la a la dreta (la de pes 1). Aquesta la posem a 1 perquè així tenim $64 + 16 + 8 + 1 = 89$ i obtenim el valor decimal desitjat.

Per tant, el nombre binari equivalent al decimal **89** és el **0101 1001₂**.

TAULA 1.3. Plantilla per convertir de binari a decimal.

128	64	32	16	8	4	2	1

A la taula, hi escriurem **de dreta a esquerra** el nombre binari i després sumar els valors decimals de les caselles que estiguin a 1.

Per exemple, el número binari 10001100 es faria com es mostra a la taula [1.4](#).

TAULA 1.4. Conversió del 10001100 binari a decimal.

128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	0	1	1	0	0

Sumem els termes a 1, obtenint:

$$128 + 8 + 4 = 140$$

Sistema binari

Conversió del sistema decimal al sistema binari (nombres decimals).

Exemple: 23,65

(part entera)

23 | 2

03 11 | 2

1, 1, 5 | 2

1, 2 | 2

0, 1

(part decimal)

0,65 × 2 = 1,30

0,30 × 2 = 0,60

0,60 × 2 = 1,20

0,20 × 2 = 0,40

0,40 × 2 = 0,80

0,80 × 2 = 1,60

0,60 × 2 = 1,20

... I anar multiplicant fins a obtenir 0,00 , i si no és possible fins que creguem oportú.

Es llegeix de dalt cap baix

Per tant: 23,65 = 10111,1010011

Sistema binari

Conversió del sistema binari al sistema decimal d'un nombre decimal.

Per passar un número de sistema binari a sistema decimal, s'escriu el número binari com a potències de base 2, amb exponents positius en la part entera i exponents negatius en la part decimal i es fan les operacions pertinents.

Exemple:

$$1001,11 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 9,75$$

Sistema binari

El codi ASCII

El codi ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*) és el codi estàndard per a l'intercanvi d'informació utilitzat en ordinadors personals.

Mitjançant aquest codi es representen els caràcters alfanumèrics, és a dir, lletres, números i signes, amb una seqüència de bits, de com a màxim 8 bits.

Aquesta seqüència de 8 bits dona 256 caràcters diferents, és a dir, 2^8 caràcters.

Els caràcters estan agrupats de tal manera que:

- Els símbols del 0 al 31, corresponen als codis de control de comunicacions i d'impressora, caràcters no imprimibles com poden ser el de la tabulació..., que s'utilitzen per controlar la forma en què la informació es transfereix des d'un ordinador a un altre o des d'un ordinador a una impressora...
- El símbol 32 correspon a la barra espaciadora.
- Els 96 símbols següents, des del número 33 al 127, correspon als caràcters com els signes de puntuació més habituals, els dígitos del 0 al 9 i les lletres majúscules i minúscules de l'alfabet llatí.

Oct	Hex	Dec	Carácter	Oct	Hex	Dec	Carácter	Oct	Hex	Dec	Carácter	Oct	Hex	Dec	Carácter
0	00	0	NUL NULI	40	20	32		100	40	64	@	140	60	96	`
1	01	1	SOH Start Of Heading	41	21	33	!	101	41	65	A	141	61	97	a
2	02	2	STX Start of TeXt	42	22	34	"	102	42	66	B	142	62	98	b
3	03	3	ETX End of TeXt	43	23	35	#	103	43	67	C	143	63	99	c
4	04	4	EOT End of Transmission	44	24	36	\$	104	44	68	D	144	64	100	d
5	05	5	ENQ ENQuiry	45	25	37	%	105	45	69	E	145	65	101	e
6	06	6	ACK ACKnowledge	46	26	38	&	106	46	70	F	146	66	102	f
7	07	7	BEL BELI	47	27	39	'	107	47	71	G	147	67	103	g
10	08	8	BS BackSpace	50	28	40	(	110	48	72	H	150	68	104	h
11	09	9	TAB horizontal TAB	51	29	41	)	111	49	73	I	151	69	105	i
12	0A	10	LF new Line Feed	52	2A	42	*	112	4A	74	J	152	6A	106	j
13	0B	11	VT Vertical Tab	53	2B	43	+	113	4B	75	K	153	6B	107	k
14	0C	12	FF new page From Feed	54	2C	44	,	114	4C	76	L	154	6C	108	l
15	0D	13	CR Carriage Return	55	2D	45	-	115	4D	77	M	155	6D	109	m
16	0E	14	SO Shift Out	56	2E	46	.	116	4E	78	N	156	6E	110	n
17	0F	15	SI Shift In	57	2F	47	/	117	4F	79	O	157	6F	111	o
20	10	16	DLE Data Link Escape	60	30	48	0	120	50	80	P	160	70	112	p
21	11	17	DC1 Device Control 1	61	31	49	1	121	51	81	Q	161	71	113	q
22	12	18	DC2 Device Control 2	62	32	50	2	122	52	82	R	162	72	114	r
23	13	19	DC3 Device Control 3	63	33	51	3	123	53	83	S	163	73	115	s
24	14	20	DC4 Device Control 4	64	34	52	4	124	54	84	T	164	74	116	t
25	15	21	NAK negative acknowledge	65	35	53	5	125	55	85	U	165	75	117	u
26	16	22	SYN SYNchronous idle	66	36	54	6	126	56	86	V	166	76	118	v
27	17	23	ETB End of Transmission. Block	67	37	55	7	127	57	87	W	167	77	119	w
30	18	24	CAN CANcel	70	38	56	8	130	58	88	X	170	78	120	x
31	19	25	EM End of Medium	71	39	57	9	131	59	89	Y	171	79	121	y
32	1A	26	SUB SUBstitute	72	3A	58	:	132	5A	90	Z	172	7A	122	z
33	1B	27	ESC ESCape	73	3B	59	;	133	5B	91	[	173	7B	123	{
34	1C	28	FS File Separator	74	3C	60	<	134	5C	92	\	174	7C	124	
35	1D	29	GS Group Separator	75	3D	61	=	135	5D	93	]	175	7D	125	}
36	1E	30	RS Record Separator	76	3E	62	>	136	5E	94	^	176	7E	126	~
37	1F	31	US Unit Separator	77	3F	63	?	137	5F	95	_	177	7F	127	DELETE

Sistema binari

Operacions en sistema binari

L'àlgebra de Boole té tres operacions definides: la suma (+), el producte ($\cdot$) i la negació (-).

Suma (+)
$0+0=0$
$1+0=1$
$0+1=1$
$1+1=10$

Producte ($\cdot$)
$0 \cdot 0=0$
$1 \cdot 0=0$
$0 \cdot 1=0$
$1 \cdot 1=1$

Negació ($\bar{}$)
$\bar{0} = 1$
$\bar{1} = 0$

La prioritat d'aquests operadors és, en primer lloc, la negació; després, la multiplicació i, finalment, la suma.

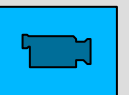
Sistema binari

Suma en sistema binari

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1_2 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1_2 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0_2 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{comprovació}} \quad \begin{array}{r} 59 \\ +\ 25 \\ \hline 84 \end{array}$$

Aplicacions del sistema binari

- 1) Molts problemes tecnològics es poden traduir del nostre sistema numèric decimal a llenguatge binari.
- 2) Podem identificar els dígit 0 i 1 amb dos estats físics diferents. Per exemple, un interruptor obert (0) i un de tancat (1); una bombeta apagada (0) i una d'encesa (1).
- 3) Les operacions booleanes de suma, multiplicació i negació es poden dur a terme físicament amb circuits electrònics, pneumàtics, hidràulics...



Les possibles combinacions de la suma binària són:

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$, i en porto una

Les tres primeres combinacions són evidents. Però la suma d'**1+1**, que en decimal sabem que és 2, s'ha d'escriure en binari amb dos dígit (10). Per tant, la suma d'1+1 és 0 i s'arrossega una unitat que se suma a la següent posició a l'esquerra.

Quin és el resultat de sumar els nombres binaris 1011 i 0110?

Fent la suma segons les regles de la suma binària obtenim:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ + \\ \hline 1 \end{array}$$

Podeu observar que el resultat té cinc dígit perquè arrosseguem un 1.

La mateixa operació però en sistema decimal hauria estat: $11 + 6 = 17$.

Complement a dos d'un nombre binari

El complement a dos (C2) d'un nombre binari és el nombre resultant de sumar 1 al seu complement a un. És a dir, $C2 = C1 + 1$.

Per exemple, per calcular el complement a dos del nombre binari 1001 primer calculem el seu complement a un invertint uns i zeros. Ens dona el nombre 0110. A aquest complement a un li sumem una unitat i ja tenim el complement a dos: $0110 + 1 = 0111$.

Generalment s'assumeix que el C2 és la manera de representar el negatiu d'un número binari.

Sistema binari

Resta en sistema binari

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1_{(2)} \\ - \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1_{(2)} \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0_{(2)} \end{array} \quad \xrightarrow{\text{comprovació}} \quad \begin{array}{r} 51 \\ - \ 17 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0_{(2)} \\ - \ 1 \ 1 \ 0 \ 1_{(2)} \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 1_{(2)} \end{array} \quad \xrightarrow{\text{comprovació}} \quad \begin{array}{r} 26 \\ - \ 13 \\ \hline 13 \end{array}$$

Recordeu...

... que en una resta de dos nombres $A - B$, el nombre A s'anomena *minuend* i el nombre B s'anomena *subtrahend*.

1.5.3 Resta en sistema binari

La resta de dos nombres binaris pot obtenir-se sumant al minuend el complement a dos del subtrahend.

Per exemple, fem la resta $1011011 - 0101110$:

- Primer calculem el complement a un del subtrahend: **1010001**.
- A continuació calculem el complement a dos d'aquest: **1010010**.
- Finalment sumem el minuend amb el complement a dos del subtrahend.

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 + \\
 \hline
 \underline{1}
 \end{array}$$

En el resultat de la suma ens sobra un bit, ja que arrosseguem un 1 per l'esquerra. Però com que el nombre resultant de la resta no pot ser més gran que el minuend, el bit sobrant s'ignora. Per tant: **1011011 - 0101110 = 0101101**.

Podeu comprovar que si
 "traduïm" la resta binària
 1011011 - 0101110 =
 0101101 a decimal ens
 dóna: 91 - 46 = 45.

1.5.4 Representació de nombres negatius en sistema binari

Amb el sistema decimal, els nombres negatius es representen senzillament precedint-los amb el signe -. En canvi, en el sistema binari no s'utilitza el signe sinó que es fan servir altres mètodes. El mètode més utilitzat és el del complement a 2 (C2).

Els nombres positius es representen amb el sistema de numeració binari normal, i els nombres negatius es representen amb el sistema de numeració binari en **complement a dos**.

Altres representacions de nombres negatius binaris

Hi ha altres mètodes per representar nombres negatius en sistema binari (el mètode de signe i magnitud, el mètode de complement a un, el mètode d'excés N...), però no són tan utilitzats com el mètode de complement a dos.

Sistema binari

Multiplicació en sistema binari

Per multiplicar en qualsevol base primer cal construir la taula de multiplicar:

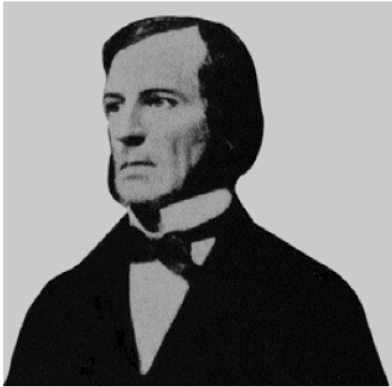
$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times 10 \\ \hline 0000 \\ 1101 \\ \hline 11010 \end{array}$$



George Boole (1815-1864)

Matemàtic i filòsof britànic. Va desenvolupar l'anomenada *àlgebra de Boole* com una eina per analitzar la ment humana. L'aplicació als sistemes digitals va ser posterior.

L'àlgebra de Boole es basa en el següent:

- Un conjunt d'elements que únicament poden tenir dos valors possibles i que anomenarem 0 i 1.
- Tres operacions que anomenarem **suma lògica**, **producte lògic** i **negació**.

Un element qualsevol de l'àlgebra de Boole es representa amb una lletra que s'anomena **variable booleana** o, alternativament, **variable binària**. Així, doncs, cada variable binària té associat un valor 1 o un valor 0.

L'àlgebra de Boole és una eina matemàtica que ens permet treballar amb sistemes que només fan servir dos estats clarament diferenciats, com és el cas dels sistemes digitals.

Àlgebra de Boole

Propietats de l'àlgebra de Boole

Commutativa	Suma	$a + b = b + a$
	Producte	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	Suma	$a + b + c = (a + b) + c$
	Producte	$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$
Distributiva	Suma	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
	Producte	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Àlgebra de Boole

Propietats de l'àlgebra de Boole

Llei d'absorció

Els termes adjacents, les variables dels quals només es diferencien en un estat, poden reduir-se a un únic terme on s'ha suprimit la variable que difereix en tots dos:

$$a + a \cdot b = a$$

$$a \cdot \bar{b} + a \cdot b = a$$

$$a + \bar{a} \cdot b = a + b$$

$$a \cdot (a + b) = a$$

$$(a + \bar{b}) \cdot (a + b) = a$$

$$a \cdot (\bar{a} + b) = a$$

Llei de De Morgan

Permet relacionar l'operació lògica *suma* amb l'operació lògica *producte*:

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Llei d'idempotència

$$a + a = a$$

$$a \cdot a = a$$

Llei de dominància

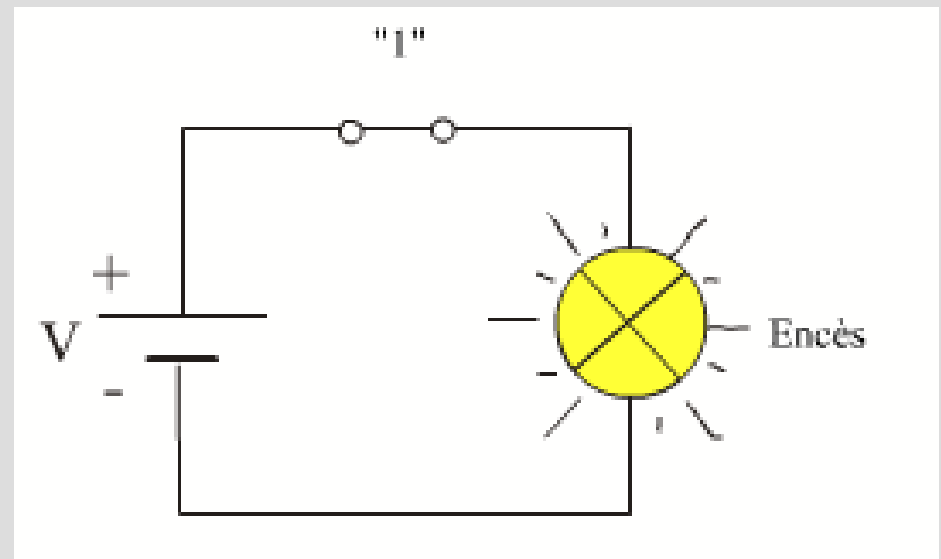
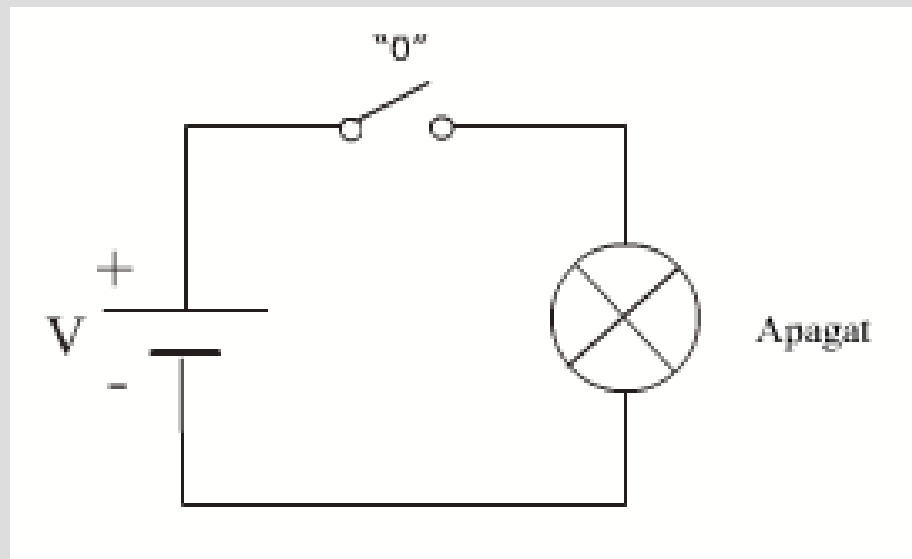
$$a + 1 = 1$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Sistema binari

Senyals binaris

Els sistemes digitals poden prendre un valor elevat d'estats, però sempre finits. Un cas particular dels senyals digitals són els **senyals lògics o binaris**, que només poden prendre dos valors, anomenats 0 i 1 (cert-fals, obert-tancat, amb tensió-sense tensió, etc.). Aquests són els que s'utilitzen en els dispositius electrònics que coneixem amb el nom de digitals.



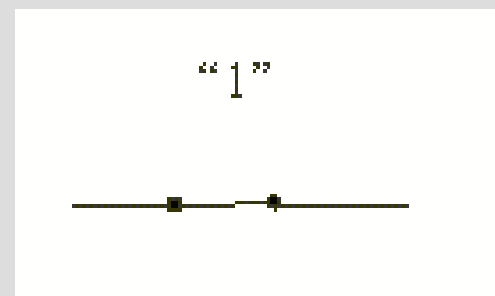
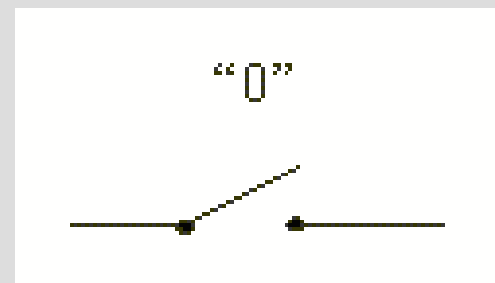
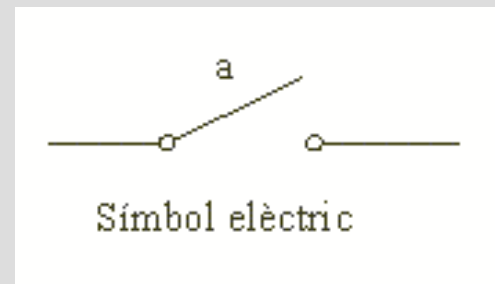
Sistema binari

Representació elèctrica dels estats binaris

L'interruptor és un element elèctric que només es pot trobar en dos estats. Llavors, una variable binària pot ser representada per l'interruptor:

Quan l'interruptor és obert, no circula corrent i es considera estat 0.

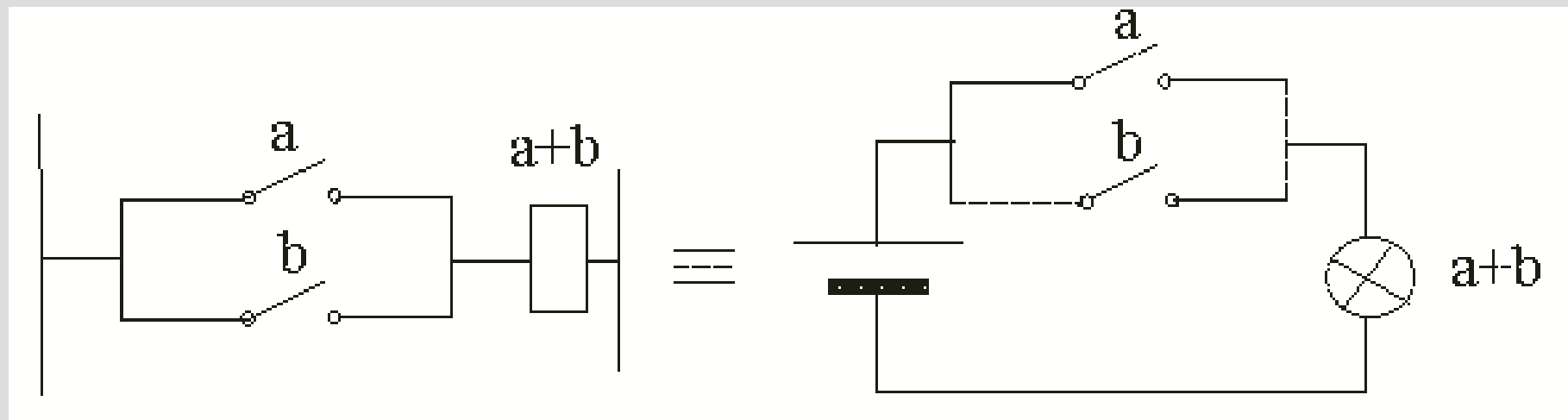
Quan l'interruptor és tancat, circula corrent i el seu estat es considera 1.



Àlgebra de Boole

Operació suma

L'operació suma està relacionada amb la condició lògica *o*. Per a la representació es poden utilitzar els diagrames de contactes. La bombeta només roman encesa si l'interruptor *a* o l'interruptor *b* estan activats.



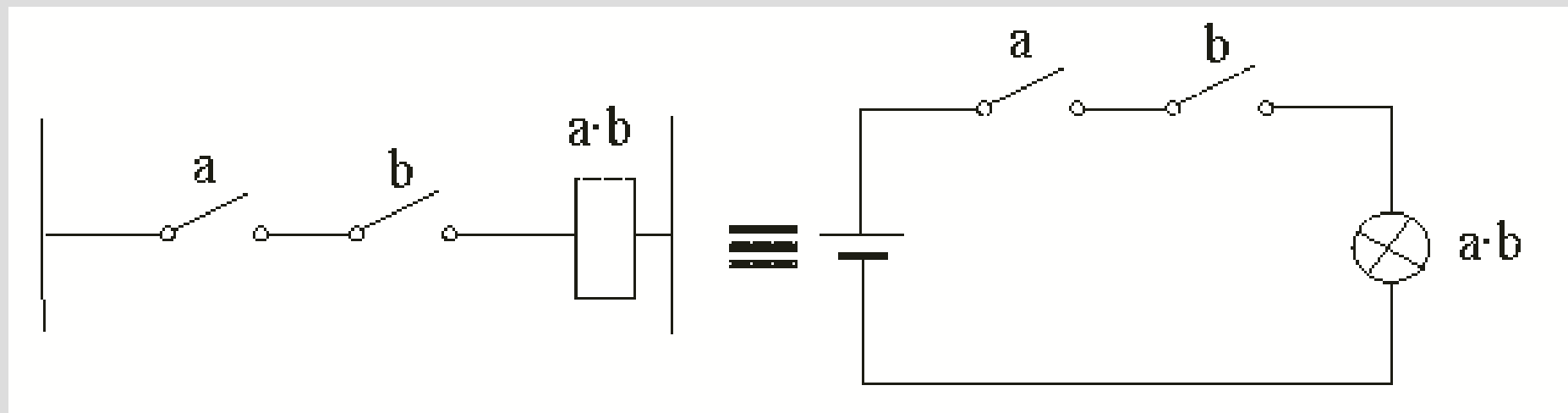
Comprovem-ho



Àlgebra de Boole

Operació producte

L'operació producte està relacionada amb l'operació lògica *i*. La bombeta només roman encesa si els dos interruptors estan activats, és a dir, quan l'interruptor *a* i l'interruptor *b* estan tancats.



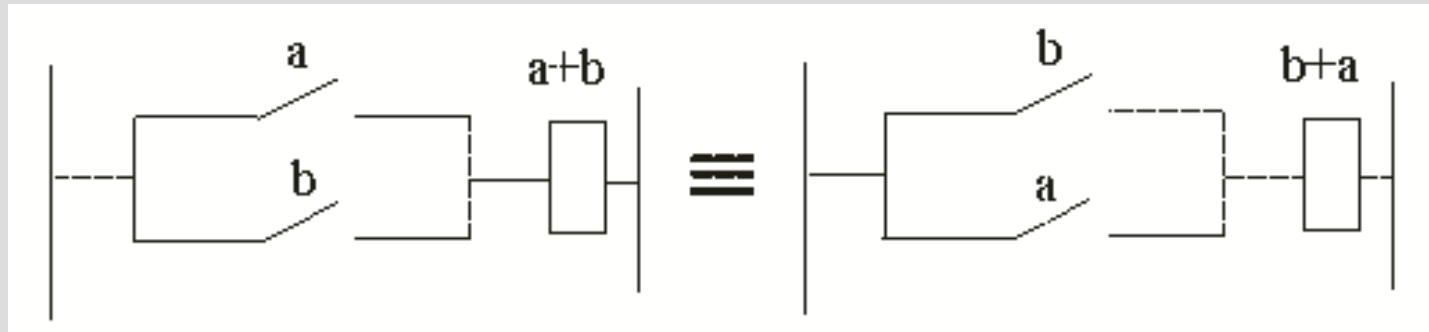
Comprovem-ho



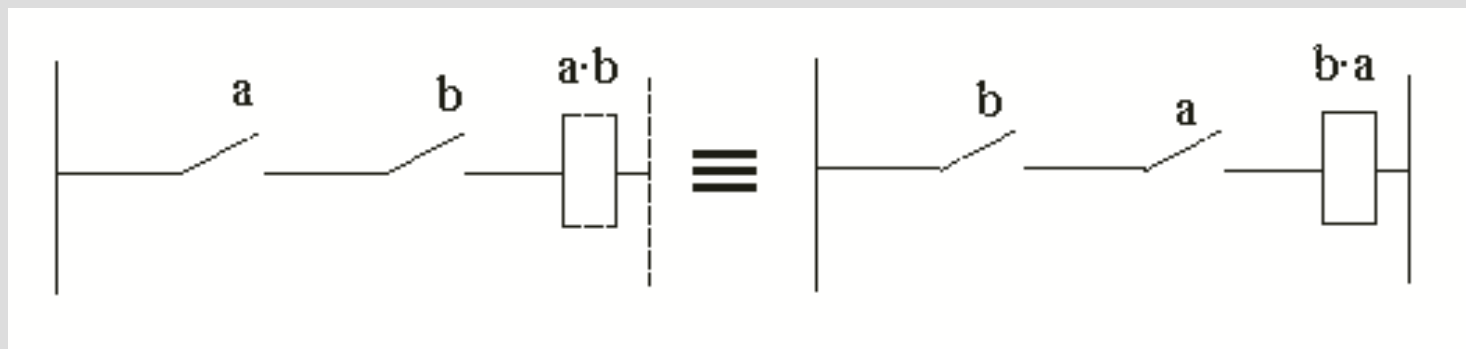
Àlgebra de Boole

Propietat commutativa

Ambdues operacions són commutatives: Respecte a la suma: $a+b = b+a$



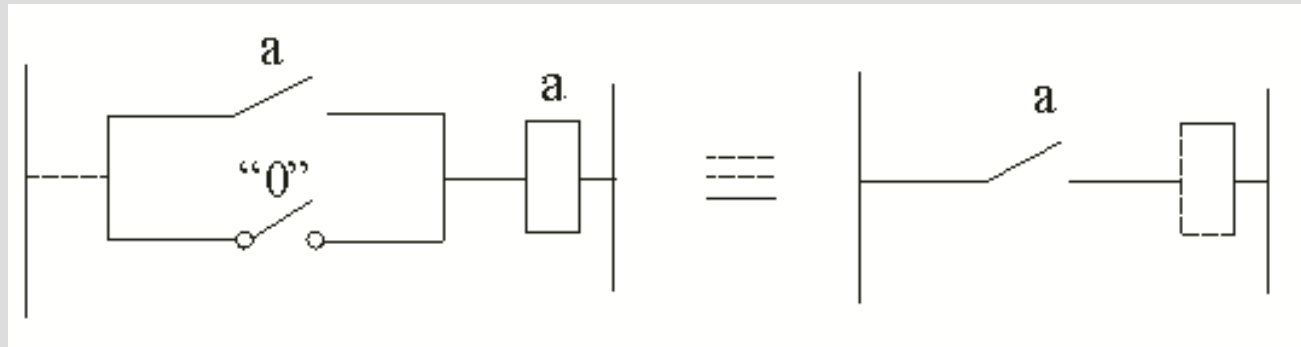
Respecte al producte: $a \cdot b = b \cdot a$



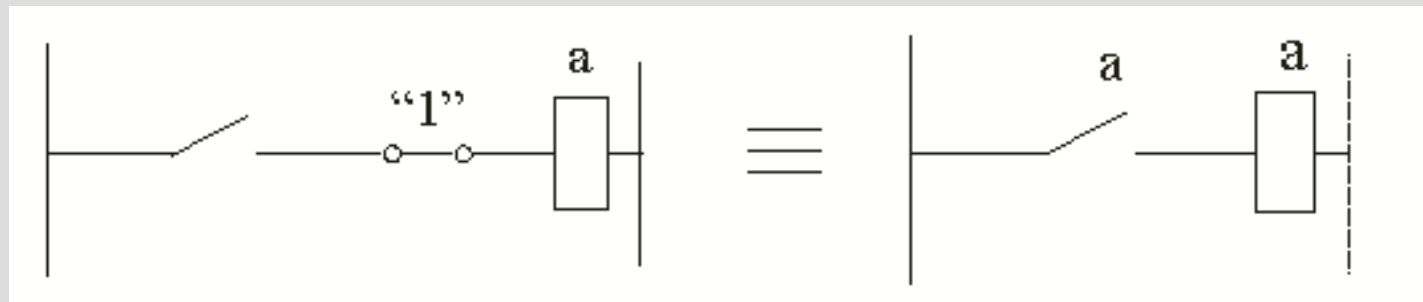
Àlgebra de Boole

Element neutre

Respecte a la suma: $0+a = a$



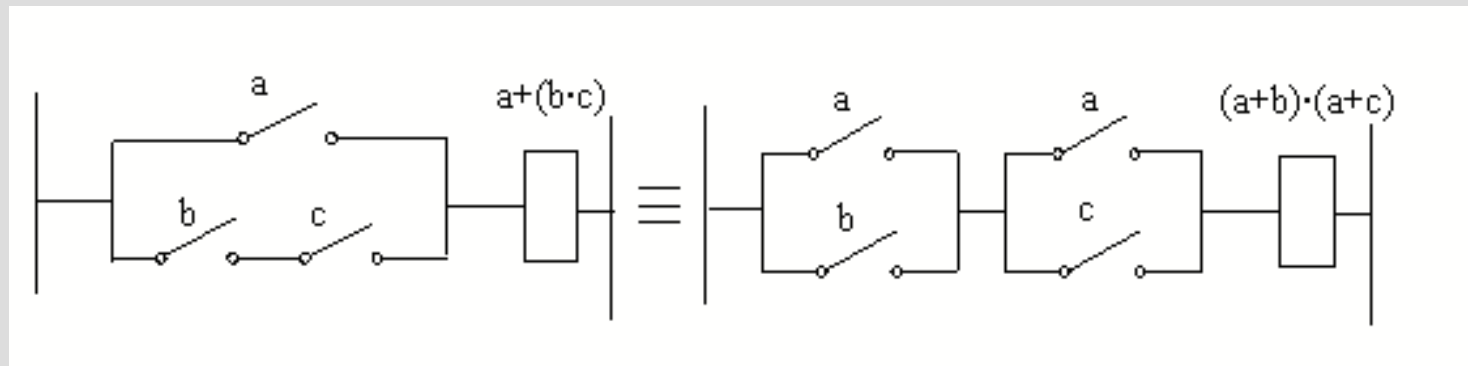
Respecte al producte: $1 \cdot a = a$



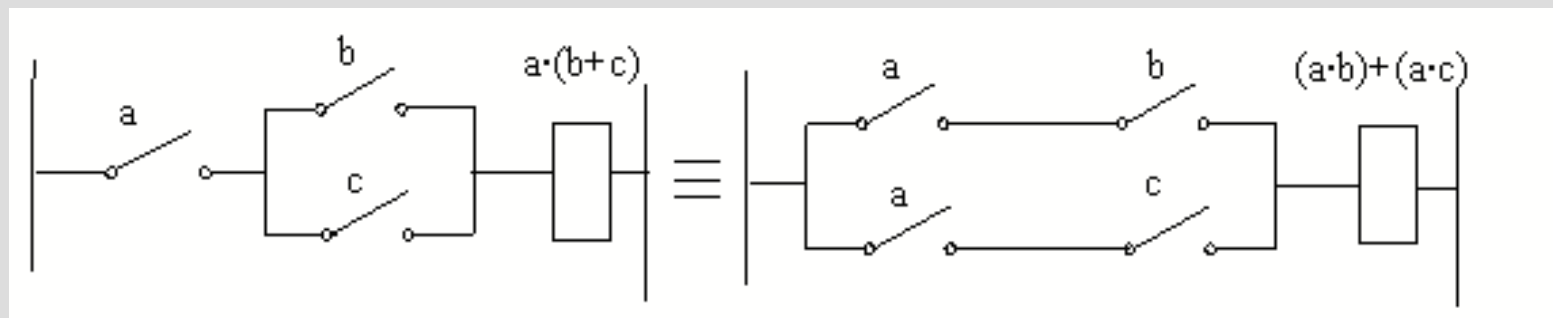
Àlgebra de Boole

Propietat distributiva

Respecte a la suma: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$



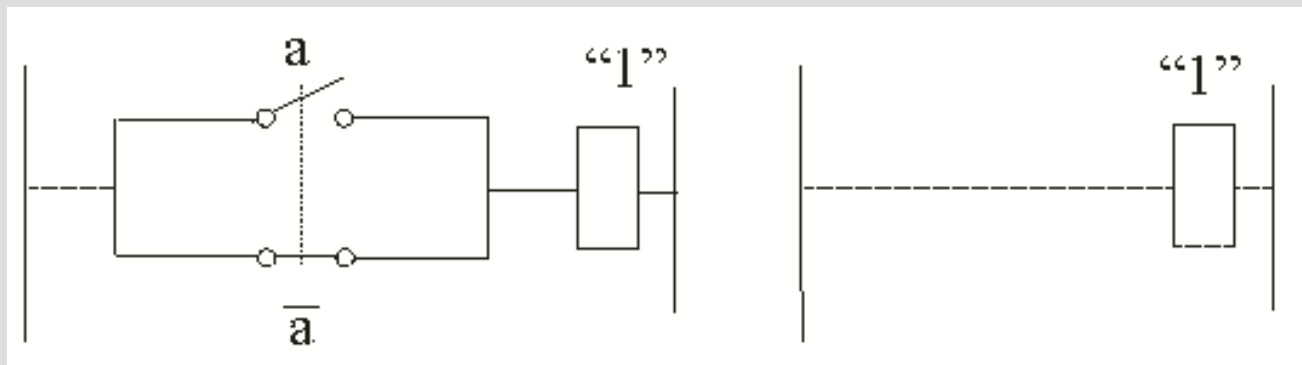
Respecte al producte: $a+b \cdot c = (a+b) \cdot (a+c)$



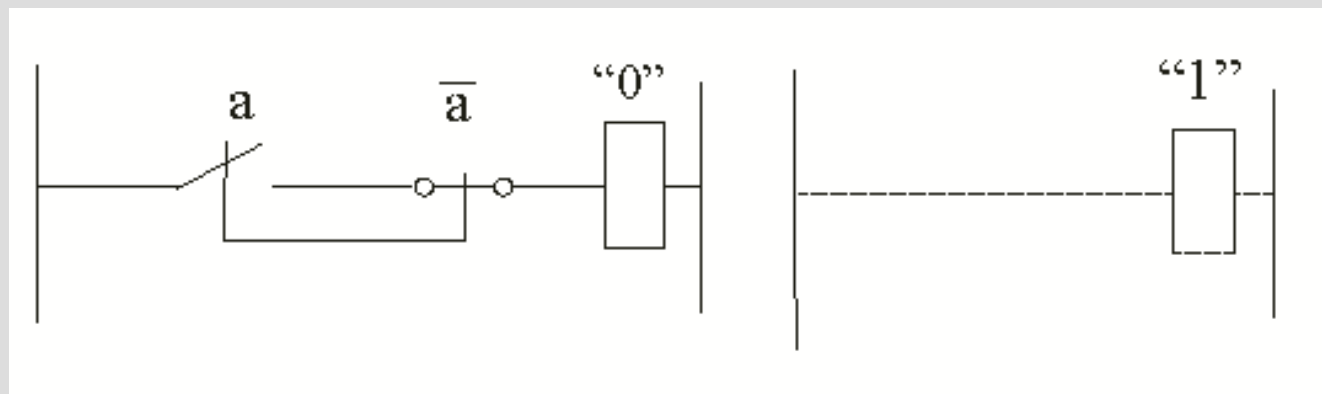
Àlgebra de Boole

Complementari

Respecte a la suma: $a + \bar{a} = 1$



Respecte al producte: $a \cdot \bar{a} = 0$





ELECTRÒNICA DIGITAL

- 12.1 El sistema binari i l'àlgebra de Boole.
- 12.2 Funcions lògiques i esquemes electrònics.
- 12.3 Funcions canòniques.
- 12.4 Sistemes digitals.

Àlgebra de Boole

Variables

Les **variables** que representen un sistema binari, com ja veurem, s'anomenen de la manera següent:

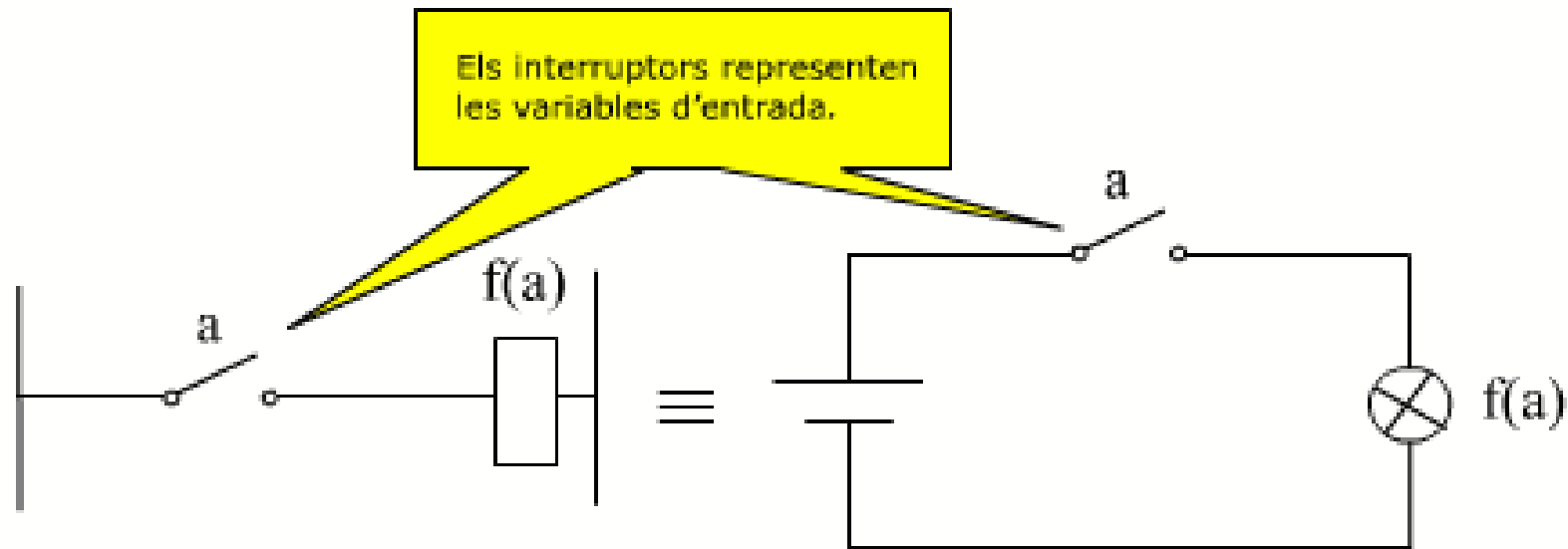
a : variable binària d'entrada.

$f(a)$: funció lògica. El senyal de sortida d'un sistema digital també és una variable binària, ja que només pot prendre dos valors ben definits: 0 o 1.

Això permet la representació de funcions lògiques amb els anomenats **diagrames de contactes**.

Àlgebra de Boole

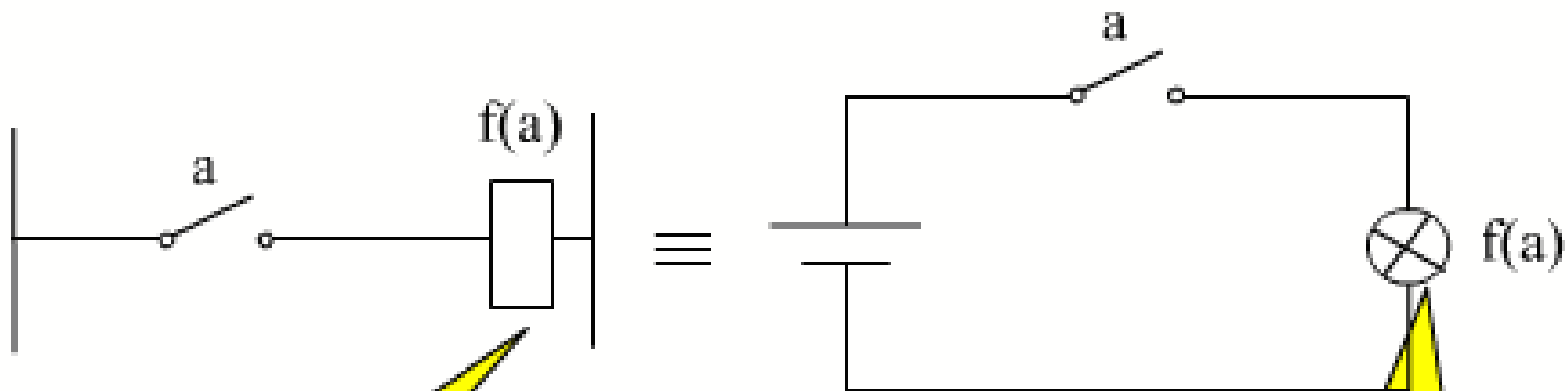
Variables



a	$f(a)$
0	0
1	1

Àlgebra de Boole

Variables



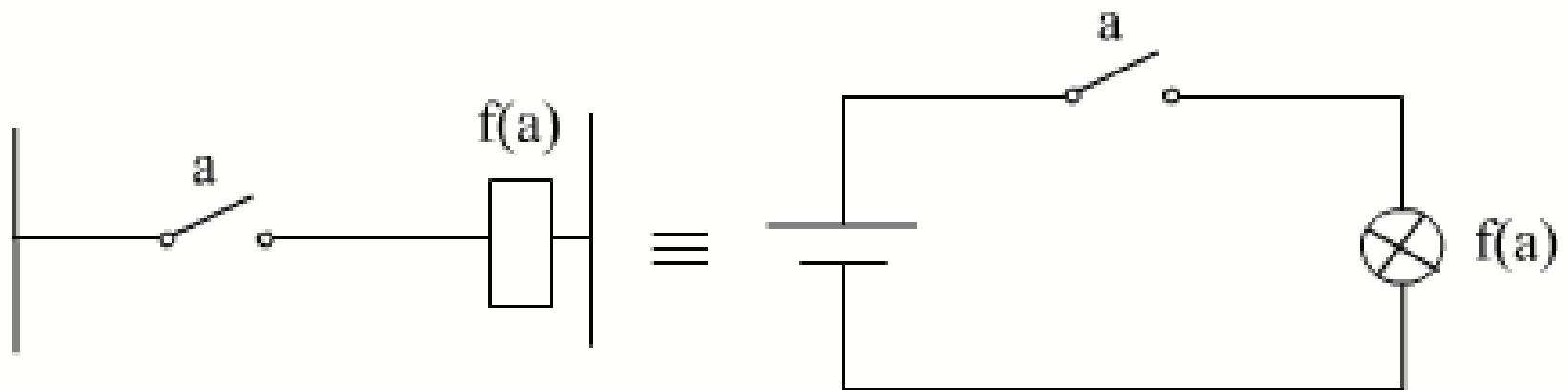
La bobina d'un relé representa la variable de sortida.

a	f(a)
0	0
1	1

La bobina equival a una bombeta d'un circuit elèctric.

Àlgebra de Boole

Variables

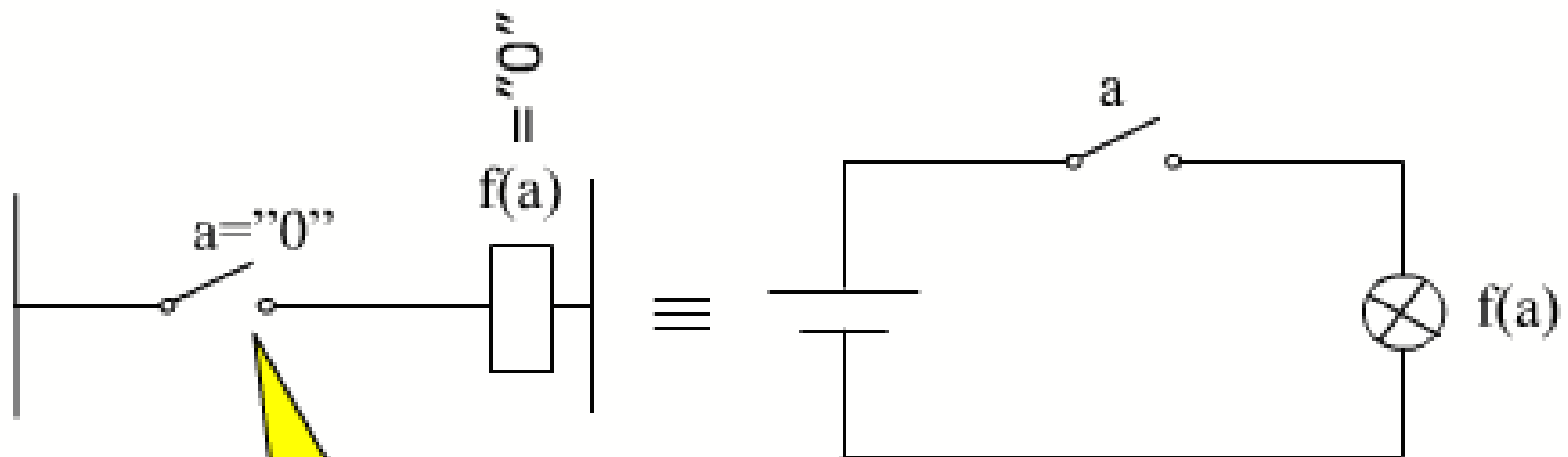


Amb la taula de la veritat podem avaluar el comportament del sistema.

a	$f(a)$
0	0
1	1

Àlgebra de Boole

Variables

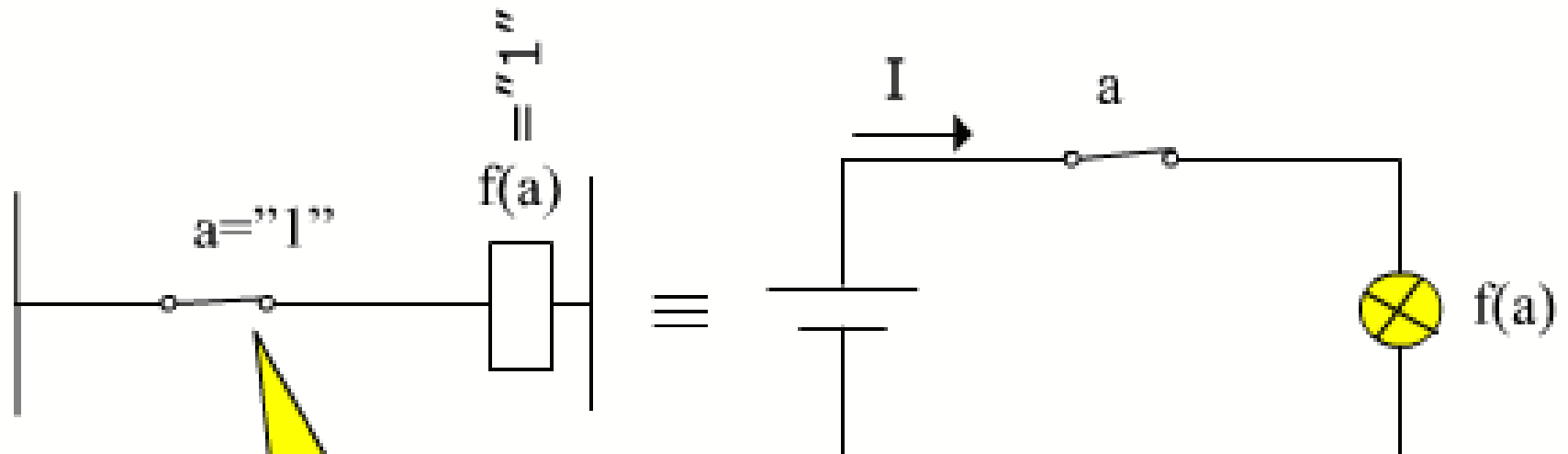


Quan l'interruptor està obert, no circula corrent i la bobina no s'activa.

a	f(a)
0	0
1	1

Àlgebra de Boole

Variables



Quan l'interruptor està tancat, circula corrent i la bobina s'activa.

a	f(a)
0	0
1	1

Funcions lògiques bàsiques

Funció d'àlgebra de Boole

Una **funció d'àlgebra de Boole** o funció lògica és una variable binària el valor de la qual és igual al d'una expressió algebraica, en què es relacionen entre si les variables binàries d'entrada mitjançant les operacions bàsiques.

Es representa per l'expressió $f = f(a, b, c...)$, segons el nombre de variables de què depèn la funció. Per exemple, una funció de 3 variables pot expressar-se de la forma $f(a, b, c) = a \cdot b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c$.

Per representar les operacions lògiques, tenim altres possibilitats, com ara la **taula de la veritat** i la representació gràfica mitjançant **símbols normalitzats**.

Diferents maneres d'escriure una funció lògica

En alguns llibres veureu que, al costat del nom de la funció, s'acostuma a escriure entre parèntesis les variables emprades per la funció. Per exemple:

$$f(a, b, c, d) = a \cdot b + c \cdot d$$

Tanmateix, moltes vegades veureu que el signe $\cdot$ del producte lògic no s'escriu, ja que es dona per suposada la seva existència. Per exemple, la funció anterior es pot escriure així:

$$f(a, b, c, d) = ab + cd$$

Compte amb els parèntesis!

Pareu atenció que, en el cas dels productes de sumes, és obligatori l'ús de parèntesis en els termes, ja que primer s'han d'avaluar les sumes i després el producte. Si, per error, escrivíssim la funció de l'exemple així:

$$f_2 = a + c \cdot b + \bar{d}$$

entendríem que primer s'hauria de fer el producte $c \cdot b$ i després fer la suma de tots els termes (estaríem al davant d'una funció en forma de suma de productes)

1.6.1 Funcions lògiques

Anomenem **funció lògica** una variable binària que pren el valor d'una expressió algebraica formada per altres variables binàries relacionades de la manera que sigui mitjançant les operacions suma lògica, producte lògic i negació.

Per exemple, les següents expressions són funcions lògiques definides per una expressió algebraica:

$$f_1 = a \cdot b + c \cdot d$$

$$f_2 = a \cdot \bar{c} + b$$

Diem que una funció està expressada com una **suma de productes** si la seva expressió algebraica està formada per una suma de termes i cada terme està format per unes variables que es multipliquen entre elles.

Per exemple, la funció següent és una suma de productes:

$$f_1 = a \cdot b \cdot c + c \cdot \bar{d}$$

Diem que una funció està expressada com un **producte de sumes** si la seva expressió algebraica està formada per un producte de termes i cada terme està format per unes variables que se sumen entre elles.

Per exemple, la funció següent és un producte de sumes:

$$f_2 = (a + c) \cdot (b + \bar{d})$$

Com s'avaluen les funcions lògiques?

Donada una expressió algebraica booleana formada per molts termes, hauríem de trobar el valor resultant de la funció seguint aquest ordre:

1. Parèntesis
2. Operació de negació
3. Operació producte lògic
4. Operació suma lògica

Exemple d'avaluació de funció lògica

Volem saber quin valor té la funció $f_1 = a \cdot b + c \cdot d$ quan $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ i $d = 1$.

Solució

S'hauria d'avaluar seguint els següents passos:

Com que no hi ha parèntesis ni negacions, en primer lloc es farien les operacions de producte lògic:

$$a \cdot b = 0 \cdot 1 = 0 \quad c \cdot d = 1 \cdot 1 = 1$$

Per acabar, es faria la suma lògica dels resultats anteriors. En aquest cas, substituïm $a \cdot b$ pel seu valor (0) i $c \cdot d$ pel seu valor (1), i obtindrem:

$$f_1 = 0 + 1 = 1$$

Exemple d'avaluació de funció lògica

Volem saber quin valor té la funció $f_2 = \bar{a} \cdot (b + c)$ quan $a = 1$, $b = 1$ i $c = 1$.

En aquest cas, en primer lloc s'ha de fer l'operació que hi ha dins del parèntesi:

$$b + c = 1 + 1 = 1$$

Després s'ha de fer l'operació de negació que té la variable a :

$$\bar{a} = \bar{1} = 0$$

I finalment s'ha de fer el producte lògic d'aquests dos resultats:

$$f_2 = 0 \cdot 1 = 0$$

Funcions lògiques bàsiques

Funcions lògiques bàsiques

Les funcions lògiques més importants, d'aplicació general en els sistemes digitals electrònics, són les següents:

Funció AND

Funció OR

Funció NOT

Funció NAND

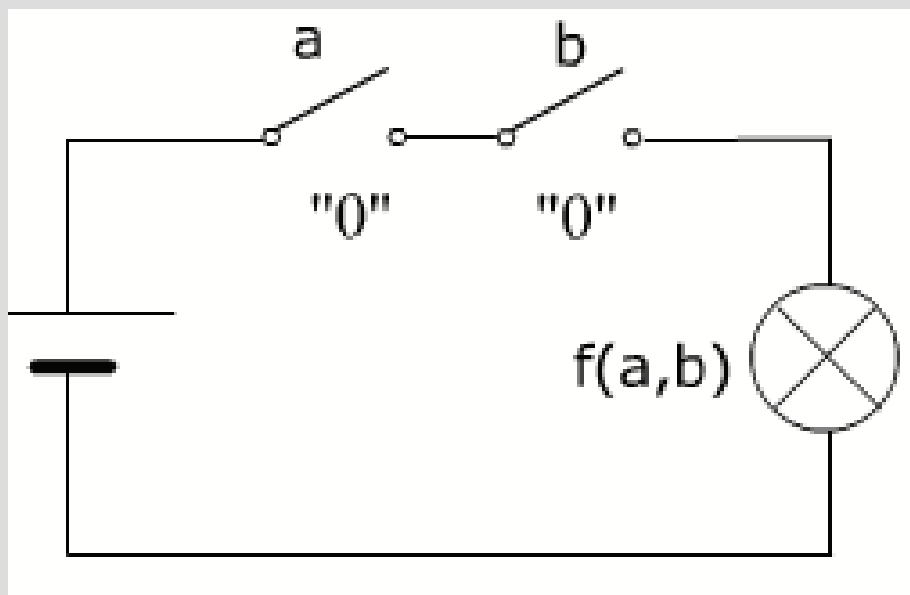
Funció NOR

Funció X-OR

Funcions lògiques bàsiques

Taula de la veritat d'una funció lògica

La taula de la veritat d'una funció lògica és una forma de representació on s'indica el valor 1 o 0, que pren la funció per a cada una de les combinacions possibles de les variables d'entrada de què depèn. Un exemple de taula de la veritat és la següent, que representa l'operació producte de dues variables:



Només cal provar totes les combinacions possibles dels interruptors i comprovar l'estat de la sortida. Recorda:

Interruptor:

- Obert: 0 lògic
- Tancat: 1 lògic

Bombeta:

- Apagada: 0 lògic
- Encesa: 1 lògic

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1. Dibuixar una taula amb:

- tantes columnes com variables tingui la funció, **més una columna addicional**
- tantes files com el nombre de possibles combinacions de les variables d'entrada, **més una fila addicional**

2. En la fila superior es posen els noms de les variables (en les columnes de l'esquerra) i de la funció (en la columna de la dreta).
3. S'omple la resta de files amb les diferents combinacions de valors de les variables d'entrada, en ordre creixent, com si comptéssim en binari natural.
4. S'omple la columna de la dreta amb el valor que pren la funció per a cada combinació de valors d'entrada.

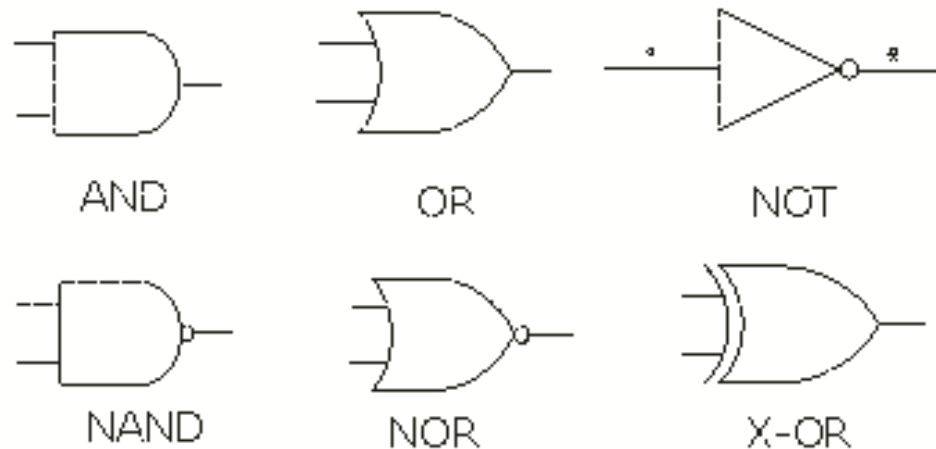
Funcions lògiques bàsiques

Representació gràfica

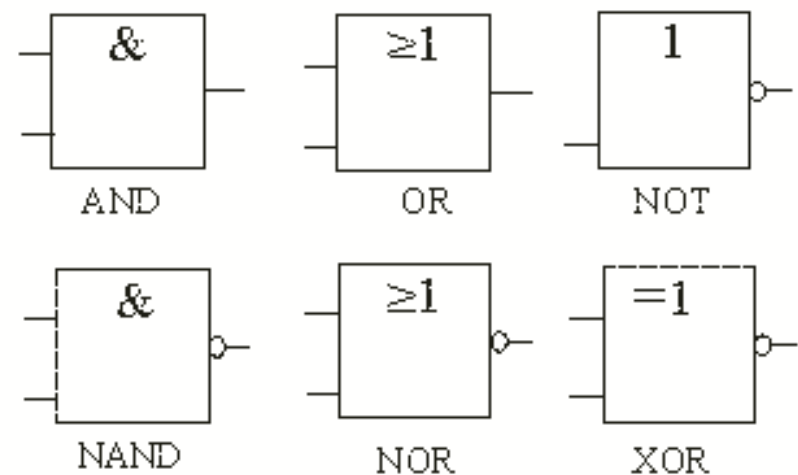
Per a la representació de les funcions lògiques bàsiques s'utilitza la simbologia normalitzada.

La representació gràfica més utilitzada en la majoria de literatura tècnica és la donada per les **normes ASA** (*American Standard*), però també és habitual trobar la simbologia segons les **normes DIN**.

Símbols segons la norma ASA



Símbols segons la norma DIN



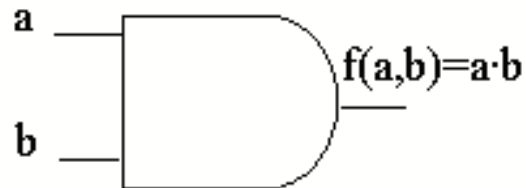
Funcions lògiques bàsiques

Funció AND

La funció lògica AND es correspon amb l'operació bàsica producte ($\cdot$). La funció només és certa (el seu valor és 1 lògic) quan tots els seus termes són certs (o el seu valor és 1).

Expressió algebraica Per a una funció de dues variables s'expressa com a $f(a, b) = a \cdot b$.

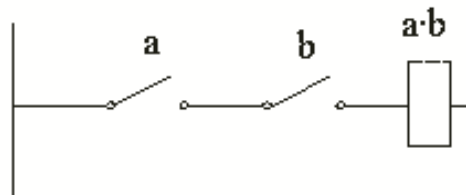
Símbol electrònic



Taula de la veritat

a	b	$f(a,b)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Diagrama de contactes equivalent



Funció AND de 3 variables



Funcions lògiques bàsiques

Funció OR

La funció lògica OR es correspon amb l'operació bàsica suma (+) i la funció és certa (el seu valor és 1 lògic) quan un dels seus termes és cert (o el seu valor és 1).

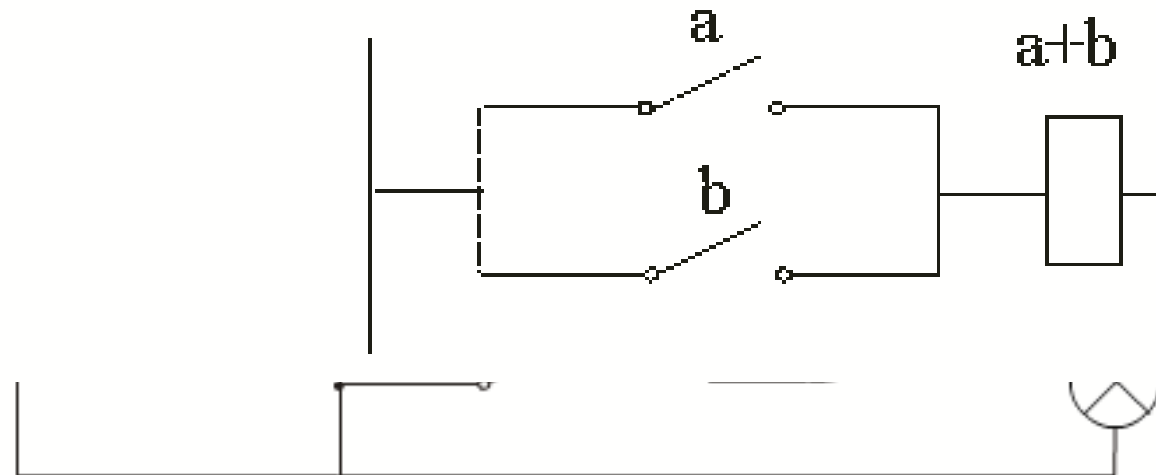
Expressió algebraica Per a una funció de dos variables s'expressa com a $f(a, b) = a + b$.

Diagrama de contactes equivalent

Si

a

b



Funcions lògiques bàsiques

Funció NOT

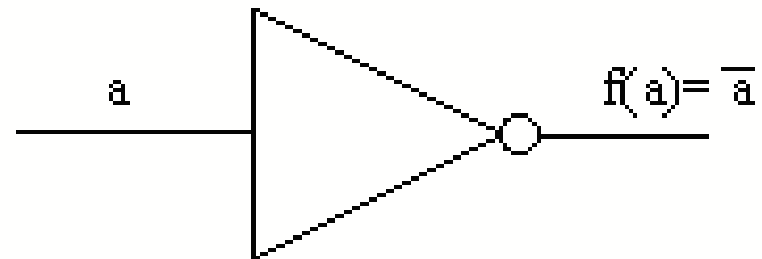
La funció lògica NOT complementa la informació d'entrada: si aquesta és certa, la sortida serà falsa, i viceversa.

Expressió algebraica s'expressa com a $f(a) = \bar{a}$

Taula de la veritat

a	f(a)
0	1
1	0

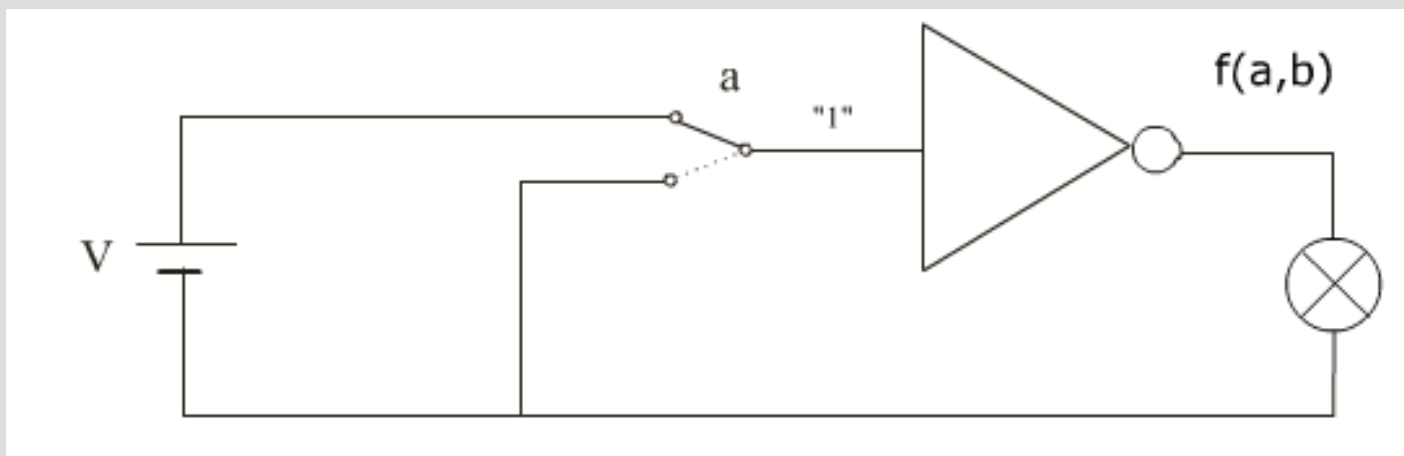
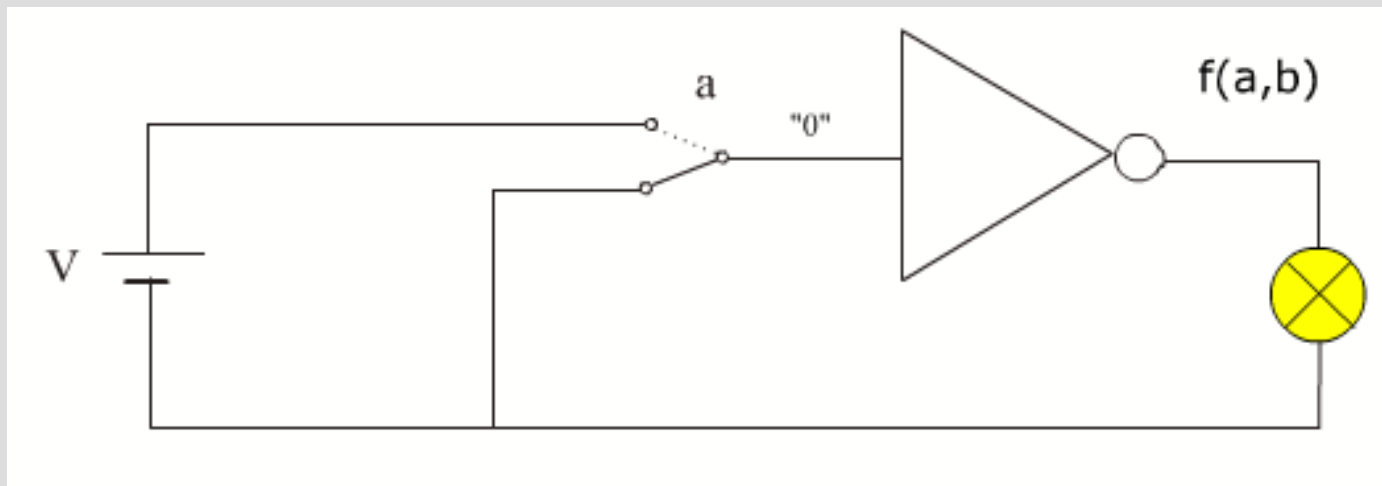
Símbol electrònic



Funcions lògiques bàsiques

Funció NOT

Exemple de funcionament



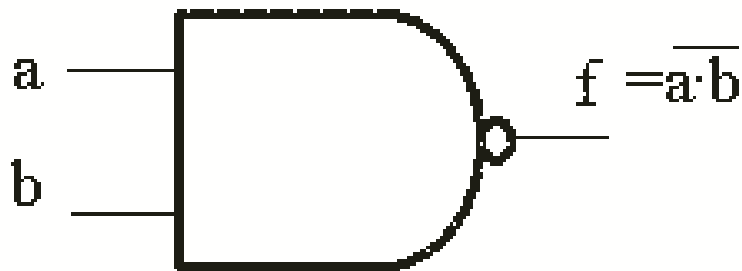
Funcions lògiques bàsiques

Funció NAND

La funció lògica NAND es correspon amb una funció AND complementada, és a dir, la funció és falsa si totes les seves variables d'entrada són certes.

Expressió algebraica s'expressa com a $f(a,b) = \overline{a \cdot b}$

Símbol electrònic



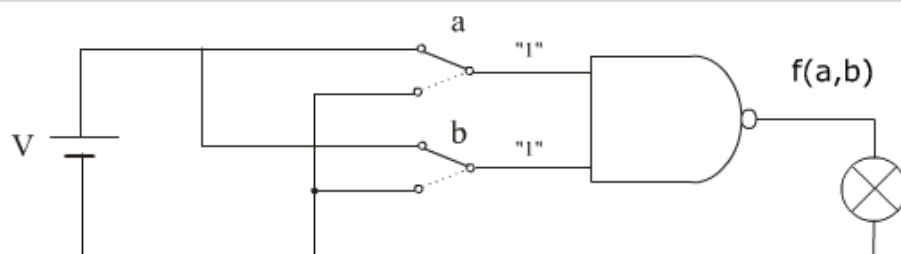
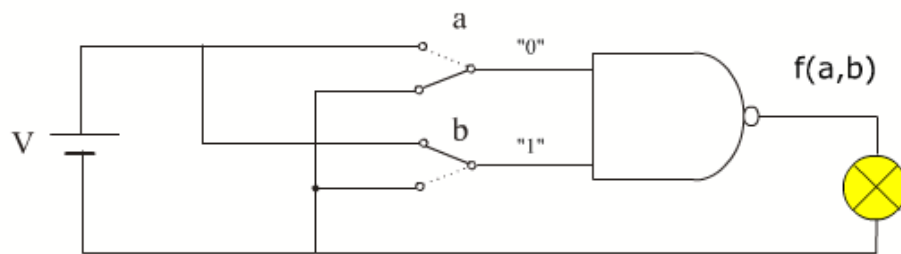
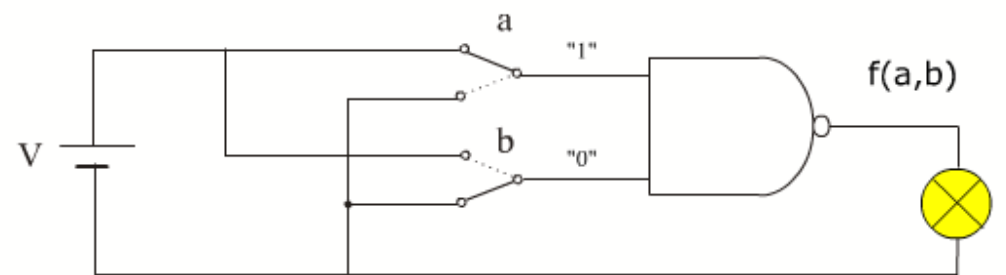
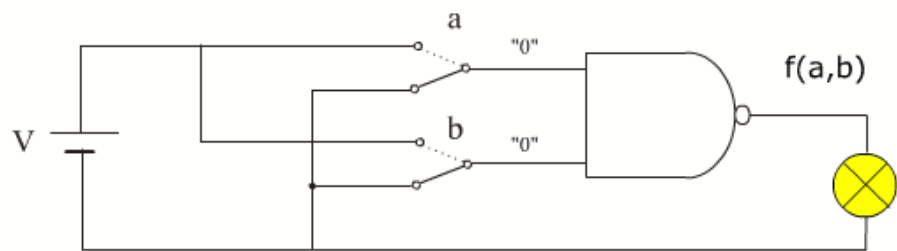
Taula de la veritat

a	b	f(a,b)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Funcions lògiques bàsiques

Funció NAND

Exemple de funcionament



Taula de la veritat

a	b	$f(a,b)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

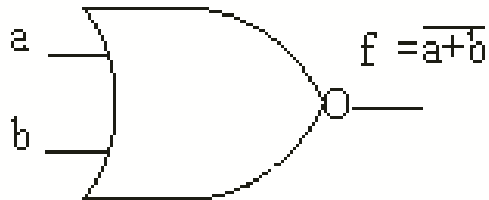
Funcions lògiques bàsiques

Funció NOR

La funció lògica NOR es correspon amb una funció OR complementada, és a dir, la funció és certa si totes les seves variables d'entrada són falses.

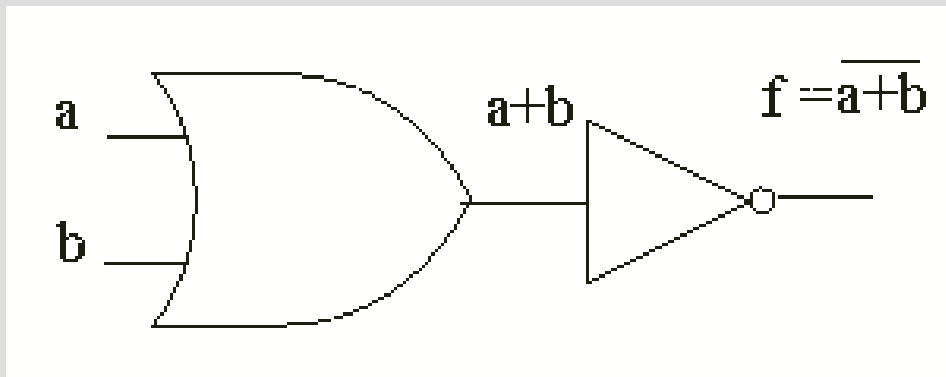
Expressió algebraica s'expressa com a $f(a,b) = \overline{a+b}$

Símbol electrònic



Taula de la veritat

a	b	f(a,b)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



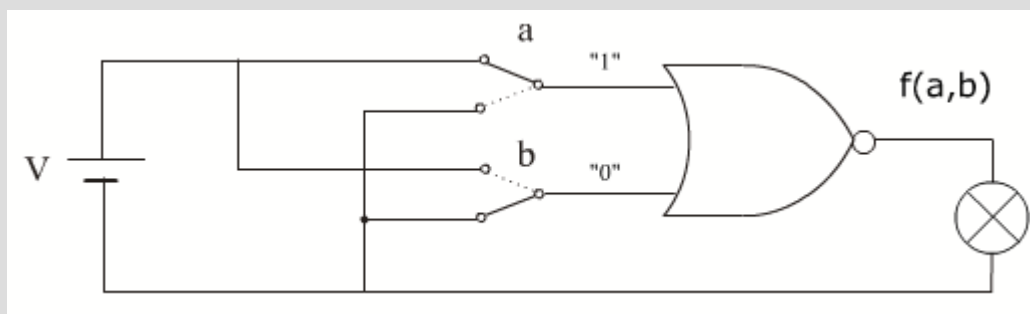
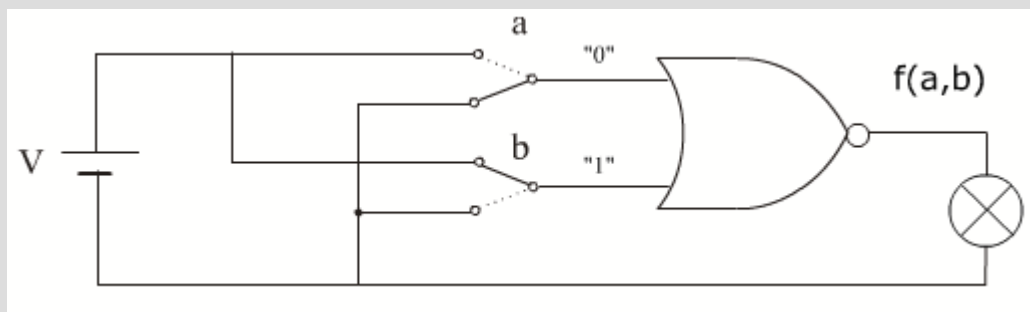
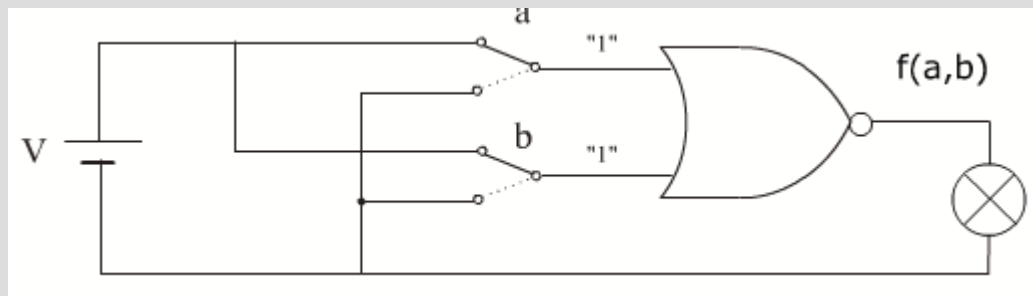
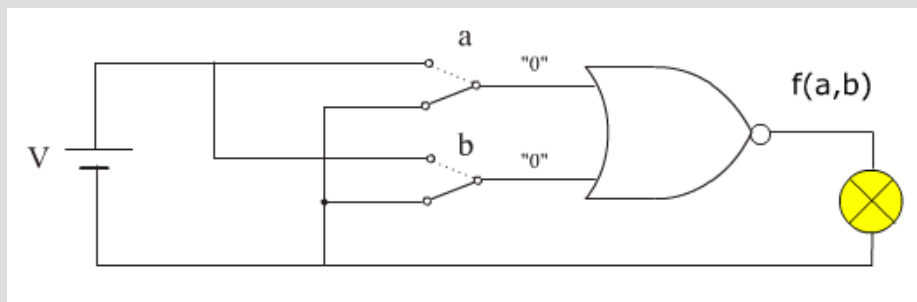
Funció NOR de 3 variables



Funcions lògiques bàsiques

Funció NOR

Exemple de funcionament



Taula de la veritat

a	b	$f(a,b)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

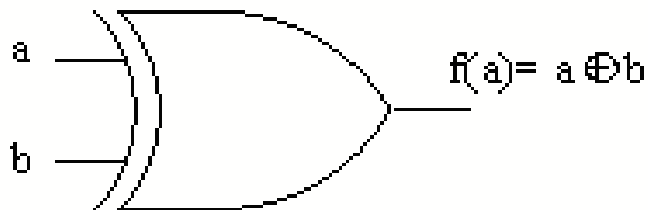
Funcions lògiques bàsiques

Funció XOR

La funció lògica XOR es correspon amb una funció OR exclusiva, és a dir, la funció és certa si només és certa una de les seves variables.

Expressió algebraica s'expressa com a $f(a,b) = a \oplus b$

Símbol electrònic



Taula de la veritat

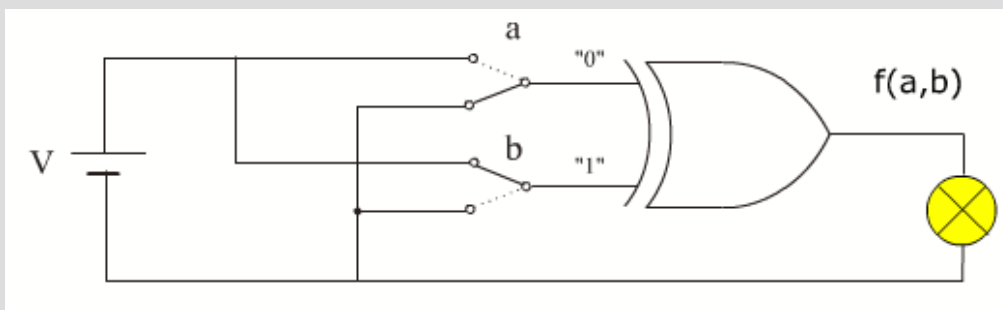
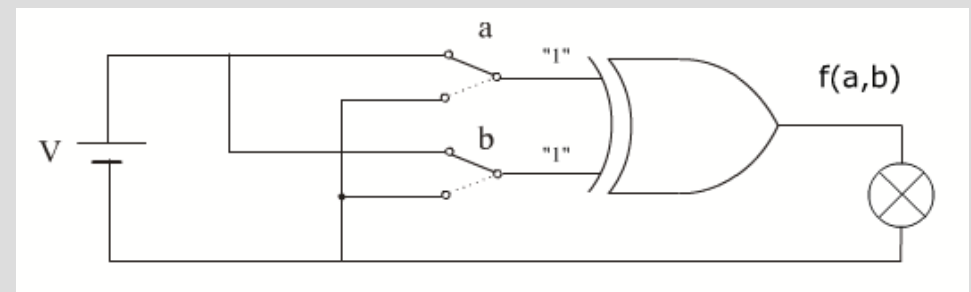
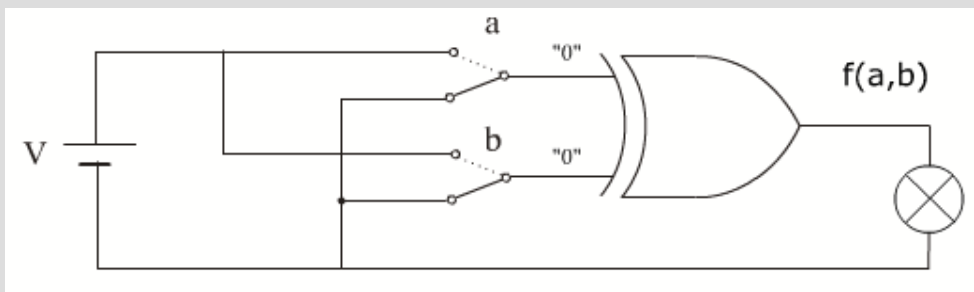
a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Funcions lògiques bàsiques

Funció XOR

Exemple de funcionament



Taula de la veritat

a	b	$f(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Esquemes electrònics

Obtenció de la taula de la veritat a partir de l'equació lògica

Per obtenir la taula de la veritat que compleix una equació lògica, cal substituir totes les combinacions possibles d'entrada en l'expressió algebraica i realitzar les operacions amb 1 i 0 fins a obtenir el valor de sortida per a cada combinació d'entrada.

Exemple

$$f(a,b,c)=a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$$

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(a, b, c)=0 \cdot 0' \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0=0 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0=0$$

$$f(a, b, c)=0 \cdot 0' \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1=0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1=0$$

$$f(a, b, c)=0 \cdot 1' \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0=0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0=0$$

$$f(a, b, c)=0 \cdot 1' \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1=0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1=0$$

$$f(a, b, c)=1 \cdot 0' \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0=1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0=0$$

$$f(a, b, c)=1 \cdot 0' \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1=1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1=1$$

$$f(a, b, c)=1 \cdot 1' \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0=1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0=0$$

$$f(a, b, c)=1 \cdot 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1=1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1=1$$

Exemple de taula de veritat d'una funció lògica donada

Per construir la taula de veritat de la funció $f_1 = a \cdot \bar{c} + b$ farem el següent:

1. Construïm la taula:

- Amb $3 + 1$ (és a dir, 4) columnes, ja que la funció és de tres variables (a , b i c).
- Amb $2^3 + 1$ (és a dir, 9) files, ja que amb 3 variables es poden fer $2^3 = 8$ combinacions.

2. Posem el nom de les variables (a , b , c) i de la funció (f_1) a la fila superior.

3. Omplim a sota totes les combinacions de valors que podem tenir amb tres variables. La primera combinació és 000, la següent 001, la següent 010... fins a arribar a l'última combinació 111 (com si comptéssim en binari).

4. Avaluem la funció per a cadascuna d'aquestes combinacions i posem el resultat a la columna de la dreta.

El resultat obtingut es mostra a la taula [1.12](#).

TAULA 1.12. Taula de veritat de la funció $f_1 = a \cdot \bar{c} + b$

a	b	c	f_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Com a exemple, veurem si són equivalents les funcions següents:

$$f_1 = a + a \cdot b \quad f_2 = a \cdot (a + b)$$

Primer omplim la taula de veritat de f_1 : el resultat el podeu veure a la taula [1.13](#).

TAULA 1.13.
Taula de veritat
de f_1

a	b	f₁
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

A continuació omplim la taula de veritat de f_2 : el resultat el podeu veure a la taula [1.14](#).

TAULA 1.14.
Taula de veritat
de f_2

a	b	f₂
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Observant les dues taules, veiem que els resultats de les dues funcions són idèntics. Per tant, f_1 i f_2 **són equivalents**.



ELECTRÒNICA DIGITAL

- 12.1 El sistema binari i l'àlgebra de Boole.
- 12.2 Funcions lògiques i esquemes electrònics.
- 12.3 Funcions canòniques.
- 12.4 Sistemes digitals.

Funcions canòniques

Expressió canònica d'una funció lògica

S'anomena **terme canònic** d'una funció lògica tot producte (o suma) en què apareixen totes les variables en la seva forma directa o inversa (complementada). La funció és canònica si tots els termes que la formen estan expressats en la seva forma canònica.

Exemple La funció següent és canònica, ja que tots els termes són canònics:

$$f(a,b,c) = a \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c$$

En canvi, la funció següent té un terme no canònic, ja que no inclou totes les variables. Per tant, la funció no està expressada en la seva forma canònica:

$$f(a,b,c) = a \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b}$$

Tipus de termes canònics

Hi ha dues maneres d'expressar una funció en la seva forma canònica:

Funció canònica com a suma de productes.

Funció canònica com a producte de sumes.

Funcions canòniques

Funció canònica com a suma de productes

La funció canònica com a suma de productes es realitza sumant els productes canònics, també anomenats **minterms**. Cadascun dels productes canònics està format pels productes de les variables d'entrada (en forma directa o complementada, segons correspongui) per a aquelles combinacions on la funció val 1: variable directa si el seu valor és 1 i variable complementada si el seu valor és 0.

Termes canònics A la figura hi ha representats els termes canònics corresponents a cadascuna de les combinacions d'entrada per a una funció de tres variables. La funció canònica cercada és la suma de tots aquests termes on la funció val 1, ja que, quan qualsevol d'aquests termes val 1, la funció també pren aquest valor, perquè tots els termes estan relacionats amb l'operació suma (+).

abc	Minterms
000	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$
001	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$
010	$\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$
011	$\bar{a} \cdot b \cdot c$
100	$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$
101	$a \cdot \bar{b} \cdot c$
110	$a \cdot b \cdot \bar{c}$
111	$a \cdot b \cdot c$

Funcions canòniques

Obtenció de la funció canònica com a producte de sumes

La funció canònica corresponent a una taula de la veritat està formada per totes les files de variables en què la funció val 1. A cada fila cal tenir en compte el valor de la variable per representar-la de forma directa o complementada.

abc	f	
000	0	
001	1	$\rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$
010	0	
011	0	
100	1	$\rightarrow a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$
101	1	$\rightarrow a \cdot \bar{b} \cdot c$
110	0	
111	0	

$f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c$

Funcions canòniques

Obtenció de la taula de la veritat a partir de la funció canònica

A partir de l'expressió canònica d'una funció és molt senzill obtenir la seva taula de la veritat. Cadascun dels termes canònics representa un 1 de la funció. Per a totes les altres combinacions, la funció val 0.

abc	f
000	0
001	1
010	0
011	0
100	0
101	1
110	1
111	1

$$f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$$

La funció canònica corresponent a la taula de la veritat està formada per totes les files de variables on la funció val "1".

Funcions canòniques

Funció canònica com a producte de sumes

La funció canònica com a producte de sumes es realitza multiplicant les sumes canòniques, també anomenades **maxterms**. Cadascuna de les sumes canòniques està formada per les variables d'entrada en forma directa o inversa, per a aquelles combinacions on la funció val 0. A diferència del cas anterior, aquestes variables es prenen de forma complementada, és a dir, si la variable pren el valor 0, la representem en la seva forma directa, i si pren el valor 1, la representem en la seva forma inversa.

Termes canònics A la figura estan representats els termes canònics corresponents a cadascuna de les combinacions d'entrada per a una funció de tres variables

abc	Maxterms
000	$a + b + c$
001	$a + b + \overline{c}$
010	$a + \overline{b} + c$
011	$a + \overline{b} + \overline{c}$
100	$\overline{a} + b + c$
101	$\overline{a} + b + \overline{c}$
110	$\overline{a} + \overline{b} + c$
111	$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

Funcions canòniques

Exemple

La funció canònica com a producte de suma que correspon a la taula de la veritat de l'exemple anterior, està formada per totes les files de variables on la funció val 0. Per a cada fila, cal tenir en compte el valor de les variables d'entrada, per representar-les de forma directa o complementada.

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

La funció que resulta és:

$$f(a, b, c) = (a + b + c) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + b + c)$$

Funcions canòniques

Conversió d'una funció no canònica en canònica

Convertir una funció que no és canònica en una funció on tots els seus termes siguin canònics (minterms) és molt senzill. Només cal aplicar als termes no canònics els següents postulats:

Existència del complementari: $a + \bar{a} = 1$

Propietat distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Exemple:

La funció $f(a, b, c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b}$ no és canònica

Multipliquem l'últim terme per $c + \bar{c}$ i ens queda $f(a, b, c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot (c + \bar{c})$

Aplicant la propietat distributiva $f(a, b, c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

Funcions canòniques

Simplificació de funcions. Mètode de Karnaugh.

El mètode de Karnaugh proporciona una mecànica senzilla per a detectar visualment els casos en què es pot minimitzar una expressió en suma de minterms.

El mètode de Karnaugh consta de 4 passos:

- 1) Traslladar la taula de veritat de la funció a una estructura que s'anomena *mapa de Karnaugh*
- 2) Detectar visualment els casos en què es pot treure factor comú.
- 3) Deduir els termes producte més simples possible.
- 4) Obtenir l'expressió mínima de la funció fent la suma lògica dels termes producte.

Funcions canòniques

La construcció del mapa de Karnaugh.

El **mapa de Karnaugh** és una transcripció de la taula de veritat d'una funció a una estructura formada per caselles en la qual cada casella correspon a una combinació de les variables (i per tant a una fila de la taula de veritat).

Estructura dels mapes de Karnaugh per a funcions de 2 variables

b \ a	0	1
0		
1		

3 variables

c \ a b	00	01	11	10
0				
1				

4 variables

c d \ a b	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Funcions canòniques

La construcció del mapa de Karnaugh.

D'aquesta manera es compleix que les caselles adjacents queden disposades en el mapa de la manera següent:

- dues caselles que tenen una aresta en comú són adjacents
- en els mapes de 3 i 4 variables, les caselles de la columna de més a la dreta són adjacents amb les de la columna de més a l'esquerra.
- en els mapes de 4 variables, les caselles de la fila superior són adjacents amb les de la fila inferior

Una vegada dibuixat el mapa, posarem dins de cada casella el valor de la funció per la combinació corresponent de variables, a partir de la taula de veritat.

x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$x_3 \ x_2$ $x_1 \ x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Funcions canòniques

La construcció del mapa de Karnaugh.

El segon pas del mètode de Karnaugh consisteix en agrupar amb rectangles els 1s que estiguin en caselles adjacents, formant grups de 1, 2, 4, 8 o 16. Els costats d'aquests rectangles han de ser d'un nombre de caselles potència de 2, i al seu interior només hi pot haver 1s

- Els grups han de ser com més grans millor
- Com menys grups hi hagi millor (per tal d'obtenir el menor nombre possible de termes producte)
- Un mateix 1 pot formar part de més d'un grup, si això ajuda a satisfer els dos objectius anteriors

$x_3 x_2$ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Incorrecte, perquè el rectangle és de 3 x 1 caselles

$x_3 x_2$ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Incorrecte, perquè el rectangle conté caselles amb 0s

$x_3 x_2$ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Incorrecte, perquè el rectangle és de 3 x 2 i conté 0s

$x_3 x_2$ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Correcte

$x_3 x_2$ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

Correcte, perquè les files superior i inferior són adjacents

$x_3 x_2$ $x_1 x_0$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Correcte, perquè les columnes dels extrems també són adjacents

Funcions canòniques

La construcció del mapa de Karnaugh.

Es mostren dues maneres d'agrupar els 1s del mapa de l'exemple anterior. Totes dues són correctes, però la de la figura 14b és millor. Sempre cal procurar trobar l'agrupació òptima.

Figura 14a

$X_3 X_2 \backslash X_1 X_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Figura 14b

$X_3 X_2 \backslash X_1 X_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

Funcions canòniques

La construcció del mapa de Karnaugh.

Així doncs, de cada grup n'obtidrem un terme producte, de la manera següent:

- només hi apareixen les variables el valor de les quals és constant per totes les caselles que formen el grup
- si en totes les caselles del grup una variable val 1, la variable apareix al terme producte sense negar
- si en totes les caselles del grup una variable val 0, la variable apareix al terme producte negada

$x_3 \backslash x_2$ $x_1 \ x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

En aquest grup les variables x_2 i x_3 no canvien de valor i valen 1, per tant x_2x_3 forma part de la funció.

En aquest grup les variables x_1 i x_2 no canvien de valor i x_1 val 0 i x_2 val 1, per tant x'_1x_2 forma part de la funció.

En aquest grup les variables x_0 x_1 i x_2 no canvien de valor i x_0 i x_2 valen 0 i x_1 val 1, per tant $x'_0x_1x'_2$ forma part de la funció.

Per tant, la funció lògica és:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 + x'_1x_2 + x'_0x_1x'_2$$

Esquemes electrònics

Esquemes electrònics

Mitjançant els símbols normalitzats es pot representar qualsevol funció lògica.

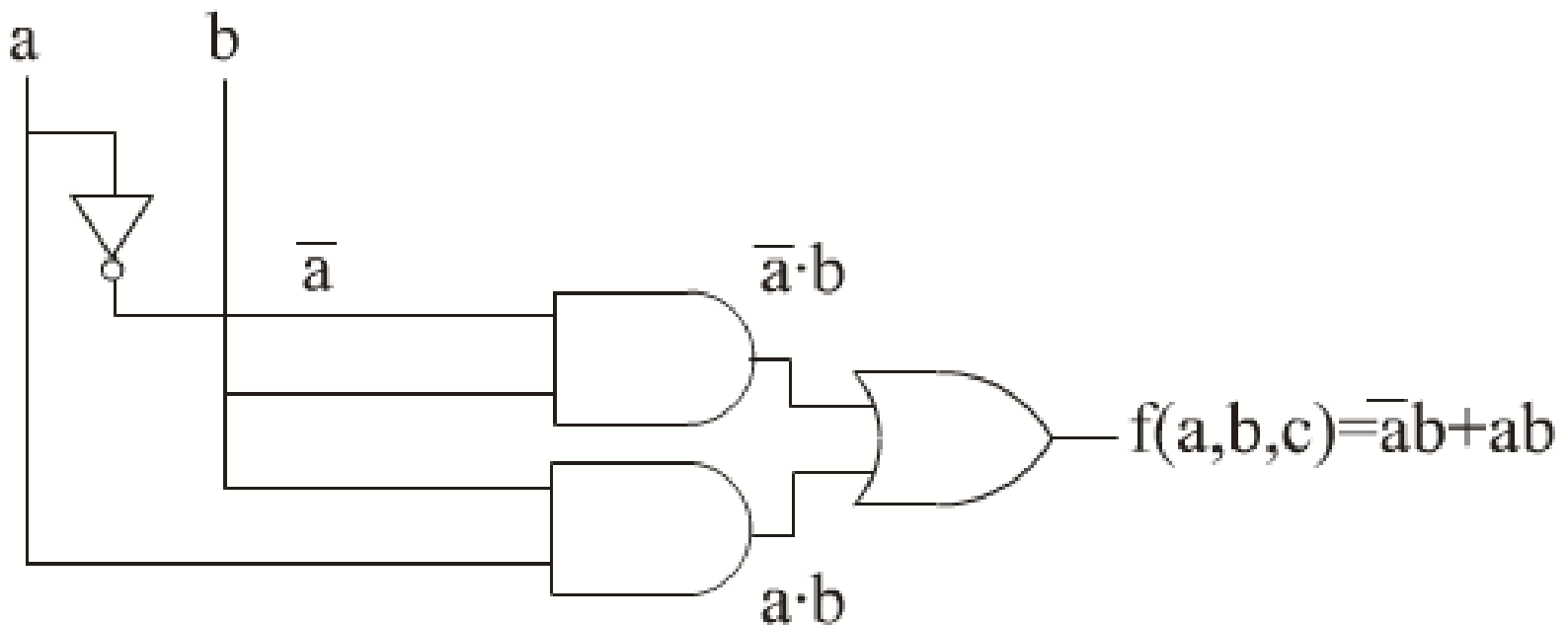
Obtenció de l'equació lògica a partir de l'esquema electrònic

A partir de les variables d'entrada de cada porta lògica es col·loca a la sortida l'equació que resol segons les seves entrades. Les sortides de les portes es tracten com a les noves variables d'entrada de la porta següent. L'equació que busquem es correspon amb l'equació de l'última porta (sortida del circuit).

Esquemes electrònics

Exemple

Observeu l'exemple de la figura. Com que coneixem l'expressió lògica de cadascuna de les portes bàsiques, és molt senzill obtenir l'expressió algebraica de la funció lògica:

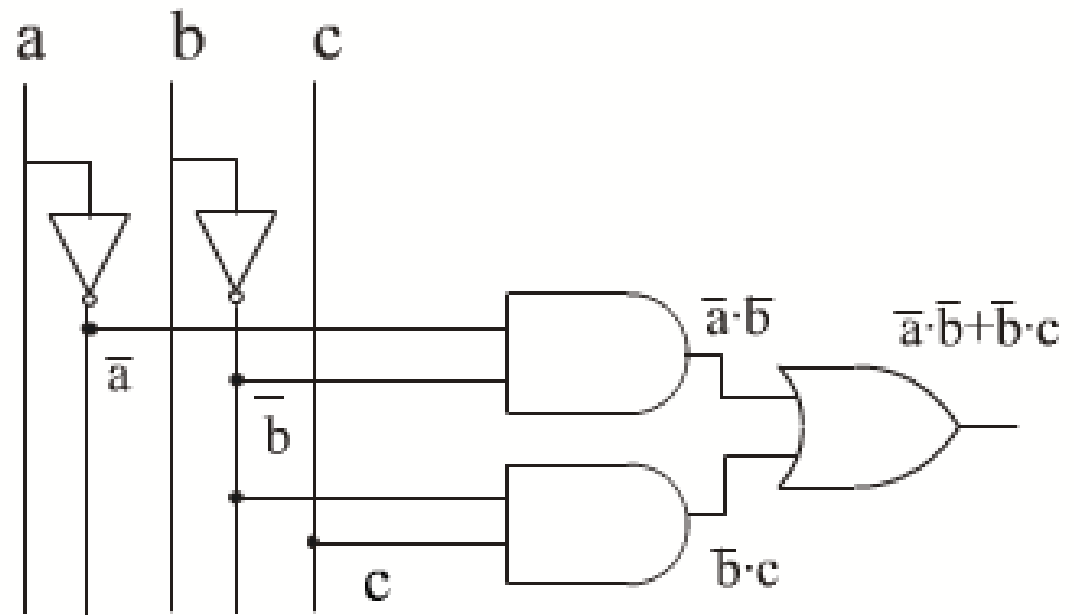


Esquemes electrònics

Obtenció de l'esquema electrònic a partir de l'equació lògica

Per obtenir l'esquema electrònic que correspon a una equació lògica, només cal utilitzar els símbols de les funcions lògiques bàsiques seguint l'ordre establert per l'equació.

$$f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot c$$



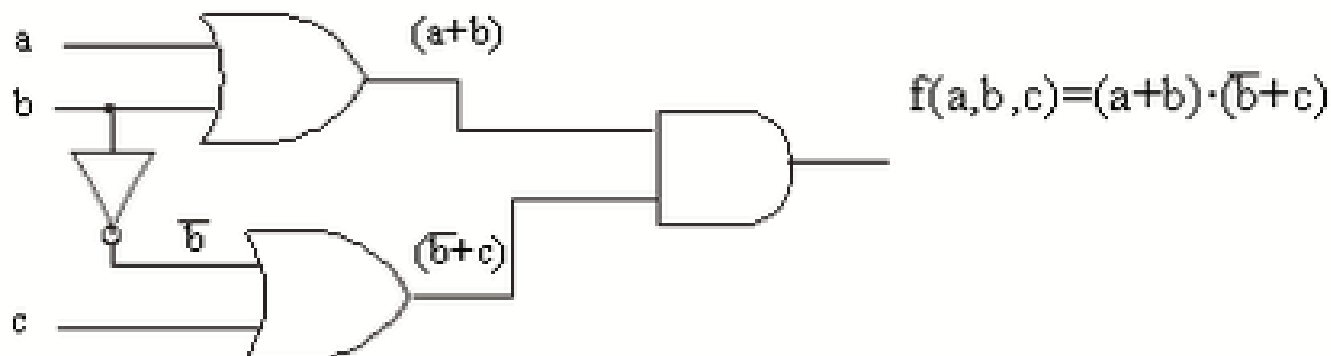
Esquemes electrònics

Obtenció de les taules de la veritat a partir de l'esquema elèctric

La manera més senzilla, encara que més laboriosa, és contemplar totes les possibilitats d'entrada existents per separat i comprovar com varia la sortida. Encara que aquest sistema és molt senzill d'utilitzar, és molt laboriós.

Exemple

Donat el circuit de la figura, cal buscar la taula de la veritat que compleix:



a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



ELECTRÒNICA DIGITAL

- 12.1 El sistema binari i l'àlgebra de Boole.
- 12.2 Funcions lògiques i esquemes electrònics.
- 12.3 Funcions canòniques.
- 12.4 Sistemes digitals.

Introducció als sistemes digitals

L'**electrònica** es pot subdividir en dues grans branques: l'electrònica analògica i l'electrònica digital. L'electrònica digital ha adquirit gran importància gràcies als avenços de la tecnologia i de l'aparició del microprocessador.

Sistemes digitals

Les magnituds que podem mesurar en el món real poden ser de dos tipus diferents:

- **Analògiques** (o contínues): tenen un rang de variació continu des d'un interval definit en el camp dels nombres reals.
- **Digitals** (o discretes): el rang de valors és discret, els seus valors estan definits en intervals del camp dels nombres enters.

La majoria de magnituds que hi ha en el món real són de naturalesa analògica, com ara el temps, el cabal d'un riu, la temperatura, etc. Expliquem-ho: suposem que escalfem a 20 °C la temperatura ambient d'una habitació que està a 10 °C mitjançant un radiador elèctric. La temperatura anirà pujant de manera contínua, passant per tots els valors possibles, fins a arribar a la temperatura desitjada. Si la temperatura fos una magnitud digital, pujaria esglaonadament (a salts), per exemple, d'1 °C. Això vol dir que la temperatura canviaria de 15 °C a 16 °C sense prendre cap valor intermedi.



Introducció als sistemes digitals

La manipulació i l'emmagatzematge de la informació analògica resulten complexos, ja que contenen infinits nivells d'informació. La conversió dels senyals analògics en digitals facilita el tractament de les magnituds analògiques.

Com a exemple, la mesura de la temperatura: aquesta magnitud és analògica i la seva mesura s'ha fet tradicionalment mitjançant mètodes analògics. Actualment són comuns els termòmetres digitals, que després de captar la temperatura mitjançant el sensor adequat, la processen amb tècniques digitals.

Un altre exemple és la telefonia. El senyal de veu és analògic i la seva transmissió es fa de manera analògica amb la XTC (xarxa de telefonia commutada). Actualment hi ha serveis de telefonia que permeten la transmissió d'aquest senyal de manera digital amb la XDSI (xarxa digital de serveis integrats).

Introducció als sistemes digitals

Avantatges dels sistemes digitals

Moltes de les magnituds físiques que mesurem són de caràcter analògic, però en canvi, les analitzem mitjançant sistemes digitals, com ara els polímetres digitals i els computadors (el sistema digital per excel·lència). Això ho fem perquè els sistemes digitals presenten molts avantatges:

- La informació es pot emmagatzemar fàcilment, per exemple amb suport magnètic, memòries electròniques, etc.
- La precisió i l'exactitud són elevades. Podem escollir per codificar la informació tants 1 i 0 (bits) com vulguem.
- Les operacions es poden programar. En els analògics també, però la complexitat de les possibles operacions en limiten l'ús.
- Els valors exactes de tensió no són importants; llavors, tenim immunitat al soroll.
- Els circuits digitals es poden fabricar en circuits integrats (CI).

Inconvenients dels sistemes digitals

D'inconvenient, pràcticament, només n'hi ha un: que el món real és analògic.

Introducció als sistemes digitals

Conversió entre sistemes digitals i analògics

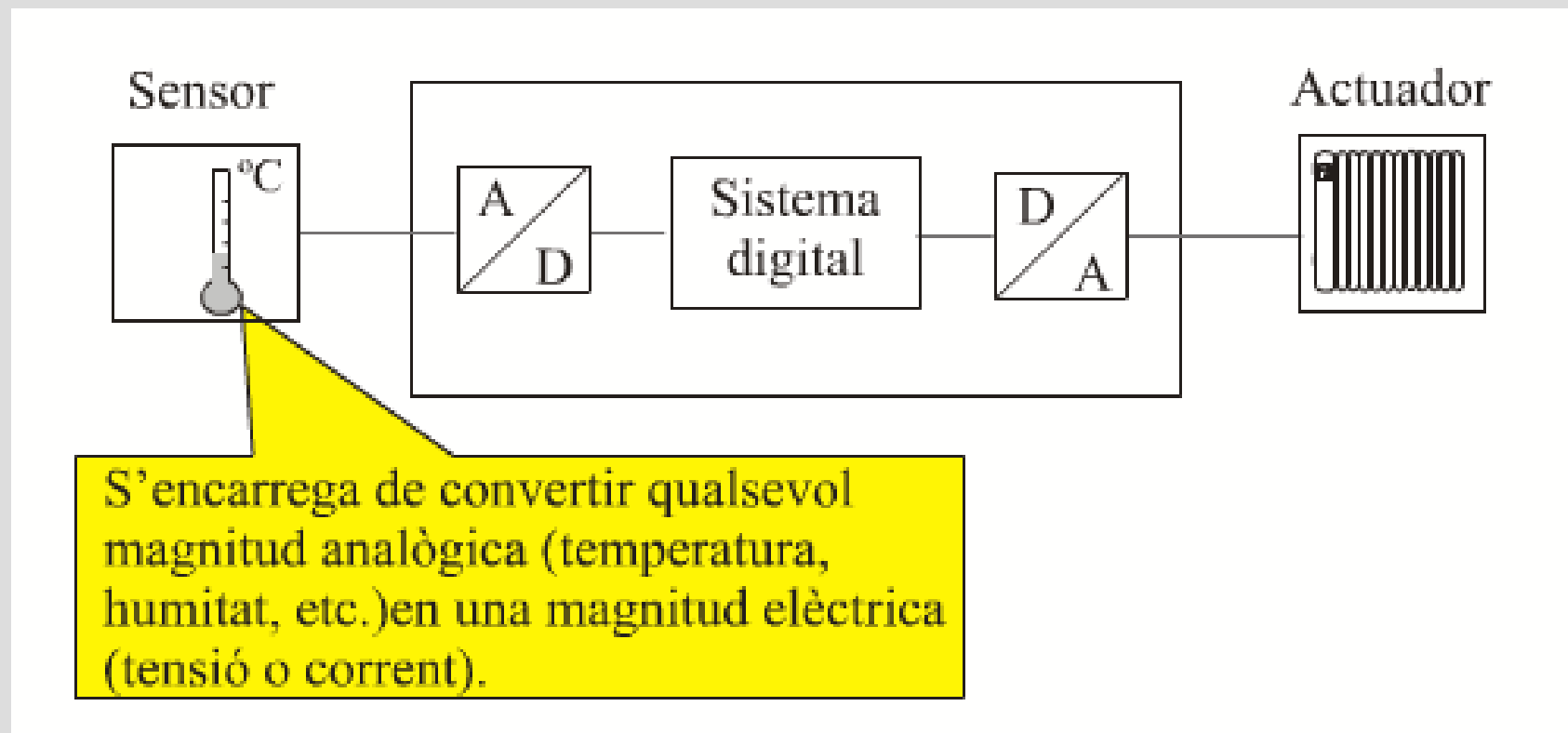
Per aconseguir els avantatges de les tècniques digitals quan es treballa amb senyals analògics, s'han de seguir els passos següents:

- Convertir el senyal d'entrada analògic en un senyal digital mitjançant un convertidor A/D.
- Processar la informació digital.
- Convertir les sortides digitals en analògiques mitjançant un convertidor D/A.

Introducció als sistemes digitals

Conversió entre sistemes digitals i analògics

L'esquema típic d'un sistema digital és el de la figura següent:

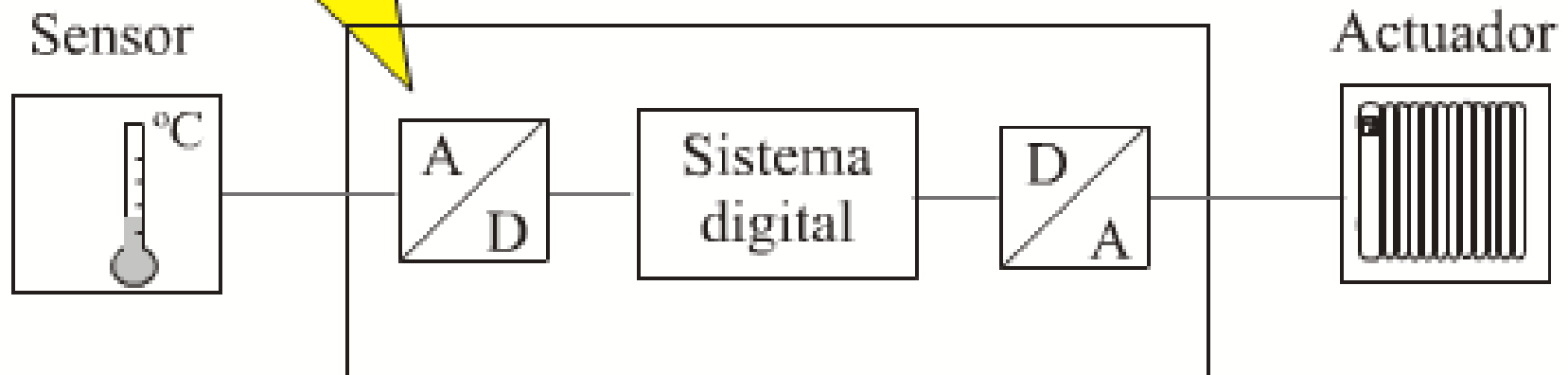


Introducció als sistemes digitals

Conversió entre sistemes digitals i analògics

L'esquema típic d'un sistema digital és el de la figura següent:

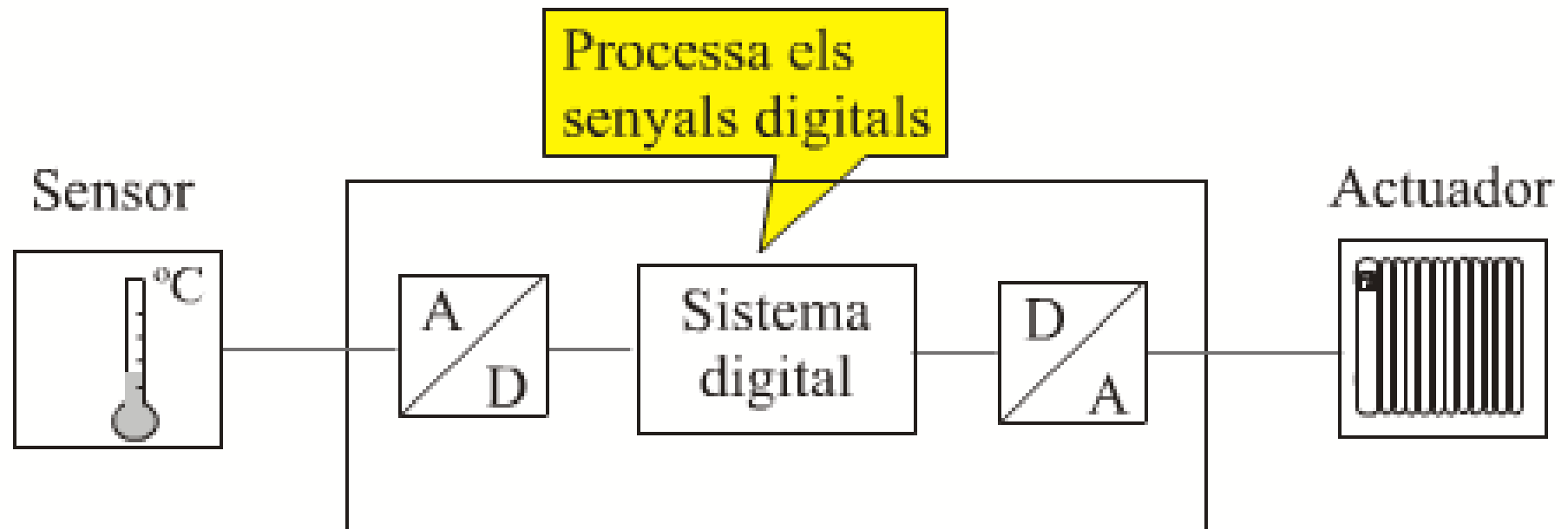
Converteix el senyal elèctric analògic en un senyal elèctric digital.



Introducció als sistemes digitals

Conversió entre sistemes digitals i analògics

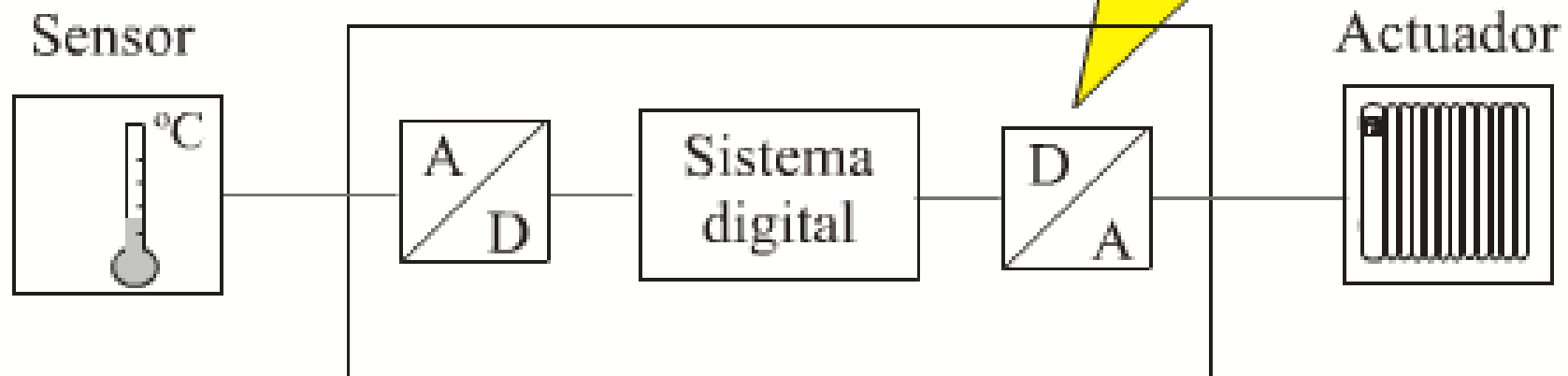
L'esquema típic d'un sistema digital és el de la figura següent:



Introducció als sistemes digitals

Conversió entre sistemes digitals i analògics

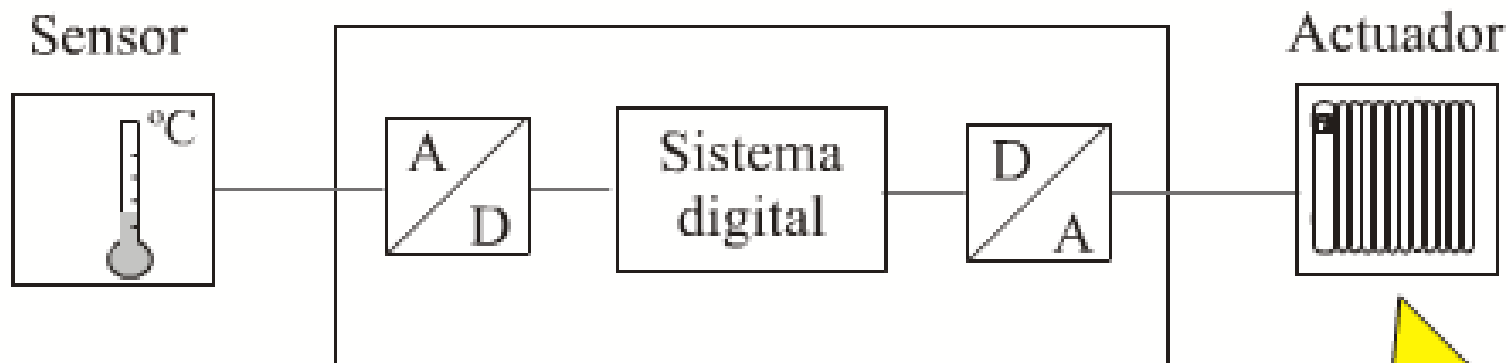
L'esquema típic d'un sistema digital és el de la figura següent:



Introducció als sistemes digitals

Conversió entre sistemes digitals i analògics

L'esquema típic d'un sistema digital és el de la figura següent:



Converteix un senyal elèctric analògic en treball útil.

Introducció als sistemes digitals

Camps d'aplicació de l'electrònica digital

El progrés de la tecnologia ha permès l'aparició de circuits digitals que permeten que els processos tradicionalment analògics puguin ser tractats de manera digital. D'aquesta manera, el camp d'aplicació de l'electrònica digital és molt ampli:

- Sistemes informàtics.
- Aparells de mesura.
- Sistemes de telecomunicació.
- Àudio i vídeo.
- Electromedicina.

Conclusió

En general, qualsevol sistema analògic pot aprofitar els avantatges dels sistemes digitals si s'utilitza la tecnologia adequada.