

FÍSICA

1R BATXILLERAT

UNITAT 7. DINÀMICA DEL SÒLID RÍGID. ESTÀTICA.

ÍNDEX

1. Sistemes de partícules: centre de masses
2. Introducció a la rotació del sòlid rígid
- ~~3. Moment angular i moment d'inèrcia~~
- ~~4. Moment d'una força: dinàmica de rotació~~
- ~~5. Conservació del moment angular~~
- ~~6. Energia cinètica de rotació~~
- ~~7. Estàtica~~

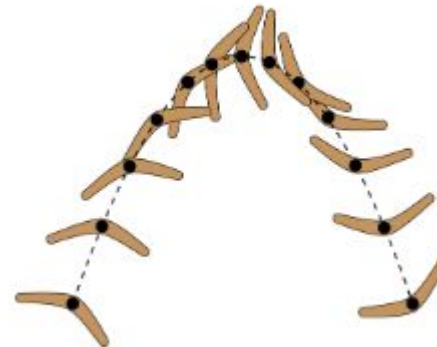
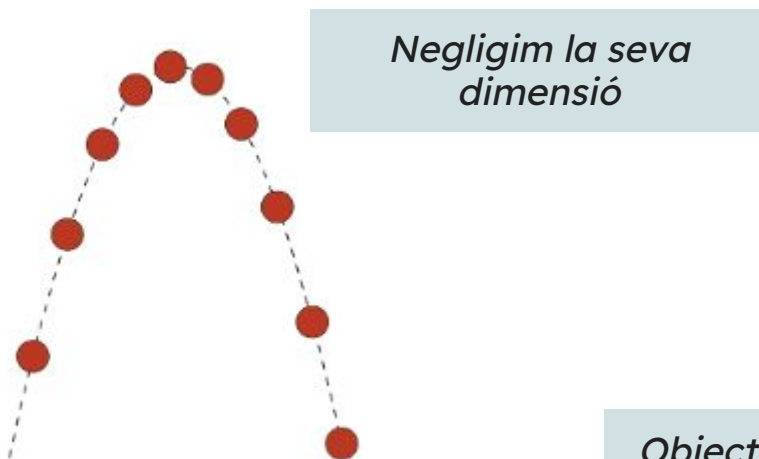
1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

CENTRE DE MASSES

Fins ara, s'han tractat els cossos com a **partícules**, punts de massa (sense volum), per simplificar una realitat física. Ex. llançament pilota en laire

En canvi, si les partícules que formen el cos mantenen les seves posicions relatives de manera que es comporta com un sòlid rígid i el seu moviment és de *translació*, es tria un punt anomenat **centre de masses**.

Apliquem les **lleis** de la **dinàmica** en ambdós casos



Objecte que experimenta **rotacions** i cal definir un **punt** de centre de masses

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

FORCES D'UN SISTEMA

Sistema format per n partícules de masses $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ que interaccionen de forma constant entre elles $\rightarrow$ **Forces internes** $\vec{F}_{ij}$

Segons la tercera llei de Newton (principi d'acció-reacció) $\rightarrow \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, força exercida la partícula j sobre la i .

Poden actuar **forces externes** sobre el sistema $(\vec{F}_{1\text{ext}}, \vec{F}_{2\text{ext}}, \dots, \vec{F}_{n\text{ext}})$ com la força de la gravetat terrestre, per tant:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}$$

Segons com són les forces externes:

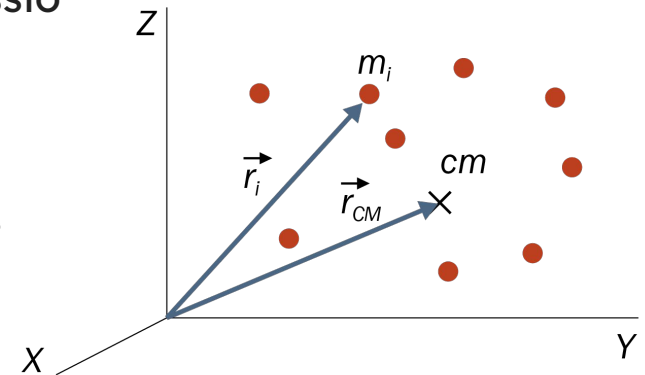
- **Conjunt de partícules lliures**, quan les forces internes són nul·les. Ex. gasos ideals.
- **Sòlid rígid**, quan les forces internes són tan fortes que les distàncies r_{ij} entre les partícules resten constants $\rightarrow$ mantenen la **posició relativa** entre elles i el sistema **conserva la forma original** encara que s'apliquen F_{ext} .

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

CENTRE DE MASSES D'UN SISTEMA DE PARTÍCULES

És el punt la posició del qual ve donada per l'expressió següent:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}$$



Expresada en les seves coordenades cartesianes:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}$$

Suma de totes les masses del sistema

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

CENTRE DE MASSES D'UN SISTEMA DE PARTÍCULES

Ex. Quin és el centre de masses dels sistemes següents? Representeu els resultats fent un esquema.

- a. Dues partícules, de masses $m_1 = 250 \text{ g}$, $m_2 = 375 \text{ g}$, situades sobre l'eix X , la primera a l'origen de coordenades i la segona, en $x = 10 \text{ m}$.
- b. Tres partícules de masses $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$ i $m_3 = 4 \text{ kg}$, situades en els punts respectius del pla XY $\vec{r}_1 = (2, -3) \text{ m}$, $\vec{r}_2 = (0, 4) \text{ m}$ i $\vec{r}_3 = (4, 2) \text{ m}$.

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

PROPIETATS DEL CENTRE DE MASSES

Velocitat del centre de masses → dividint entre Δt l'expressió del centre de masses

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_n \vec{v}_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

Tant si la velocitat és constant com si varia en el temps és vàlida!

Quantitat del moviment total del sistema → si passem la M a l'esquerra de l'equació de la velocitat.

$$M \vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_n \vec{v}_n \rightarrow M \vec{v}_{cm} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}$$

El centre de masses d'un sistema de partícules es comporta com si tota la massa del sistema hi fos concentrada.

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

PROPIETATS DEL CENTRE DE MASSES

Acceleració del centre de masses → substituint la velocitat per l'acceleració ($a = \Delta v / \Delta t$) a l'expressió de la velocitat.

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + \dots + m_n \vec{a}_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{M}$$

Si passem la M a l'esquerra de l'equació de l'acceleració → **segona llei de Newton** $\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$ i recordem que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{int}$

$$M \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + \dots + m_n \vec{a}_n = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \left(\vec{F}_{1ext} + \sum_{j=2}^n \vec{F}_{1j} \right) + \dots + \left(\vec{F}_{next} + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_{nj}^{j \neq i} \right)$$

$$M \vec{a}_{cm} = \left(\vec{F}_{1ext} + \dots + \vec{F}_{next} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \right) \rightarrow M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{1ext} + \dots + \vec{F}_{next} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iext}$$

$$F_{ij} = -F_{ji} \rightarrow F_{ij} + F_{ji} = 0$$

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

PROPIETATS DEL CENTRE DE MASSES

Si passem la M a l'esquerra de l'equació de l'acceleració → **segona llei de Newton** $\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$ i recordem que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{int}}$

$$M \vec{a}_{\text{cm}} = m_1 \vec{a}_1 + \dots + m_n \vec{a}_n = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \left(\vec{F}_{1\text{ext}} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{1j} \right) + \dots + \left(\vec{F}_{n\text{ext}} + \sum_{j=1}^{n-1} \vec{F}_{nj} \right)$$

$$M \vec{a}_{\text{cm}} = \left(\vec{F}_{1\text{ext}} + \dots + \vec{F}_{n\text{ext}} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \right) \rightarrow M \vec{a}_{\text{cm}} = \vec{F}_{1\text{ext}} + \dots + \vec{F}_{n\text{ext}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i\text{ext}}$$

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \rightarrow \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$

La resultant de les forces externes que actuen sobre el sistema

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{cm}}$$

Reforça el concepte que tot el sistema es comporta com una partícula de massa concentrada en el centre on s'aplica la $\mathbf{F}_{\text{ext}}$

Sistema **tancat** (no entra ni surt cap partícula) → M constant

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

PROPIETATS DEL CENTRE DE MASSES

Ex. Dues boles de billar de la mateixa massa, que suposem que es comporten com a partícules, experimenten un xoc elàstic unidimensional sobre una taula en què es negligeix el fregament. Descriviu el moviment del centre de masses, i elaboreu un diagrama en què es representi la seva posició a intervals regulars de temps, abans i després del xoc, si la primera bola porta una velocitat determinada v i la segona es troba en repòs.

1. SISTEMES DE PARTÍCULES: CENTRE DE MASSES

PROPIETATS DEL CENTRE DE MASSES

Ex. Des d'un penya-segat d'altura 28 m sobre el nivell del mar es llança un objecte amb una velocitat inicial de 15 m/s que forma un angle de 38° amb l'horitzontal. Quan comença els descens, l'objecte es trenca en tres parts, de masses 2,3 kg, 1,8 kg i 0,4 kg, que arriben a l'aigua al mateix moment. Si els dos primers fragments cauen al mar a 20 m i 62 m de la base del penya-segat, respectivament, a quina distància horitzontal cau el tercer fregament, si negligim el fregament amb l'aire?

2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

CENTRE DE MASSES D'UN SÒLID RÍGID

Fins ara es considera un cas particular aplicable de forma ideal, però cal considerar que si les **forces externes** superen cert valor el cos pot **deformar-se** o **trencar-se**.

Considerem:

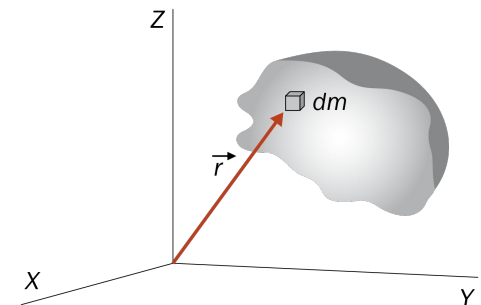
- Sistema de partícules constant $\rightarrow$ cossos continus
- Volum gran de partícules compactades (no espai entre elles)

Complexitat
gran

$$\vec{r}_{cm} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{r}_i}{M} \rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

Per tant, es valoren cosos homogenis que:

- **Punt, recta o pla de simetria**



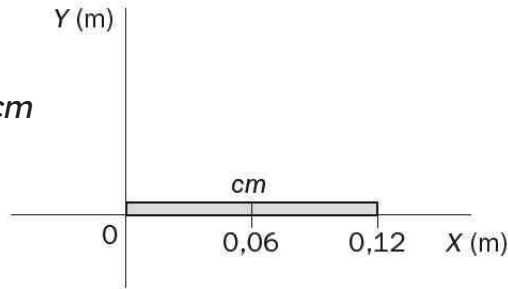
2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

CENTRE DE MASSES D'UN SÒLID RÍGID

Ex.

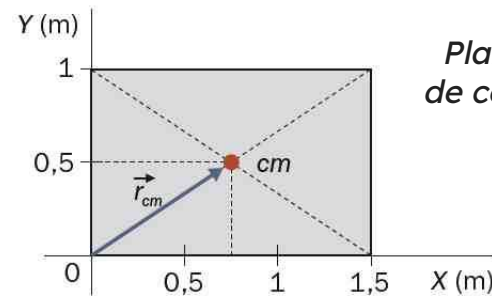
a) $x_{cm} = 0,06 \text{ m}$

Vareta de 12 cm



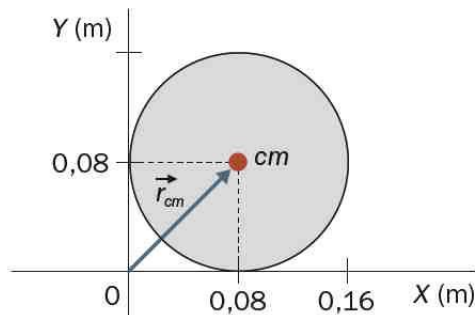
b) $\vec{r}_{cm} = (0,75, 0,5) \text{ m}$

Planxa rectangular de costats 1,5 m i 1 m



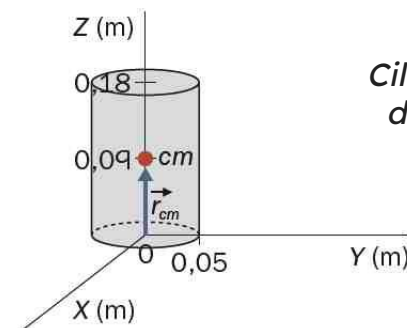
c) $\vec{r}_{cm} = (0,08, 0,08) \text{ m}$

Anella circular de $r = 8 \text{ cm}$



d) $\vec{r}_{cm} = (0, 0, 0,09) \text{ m}$

Cilindre massís de 18 cm d'altura i 5 cm de radi

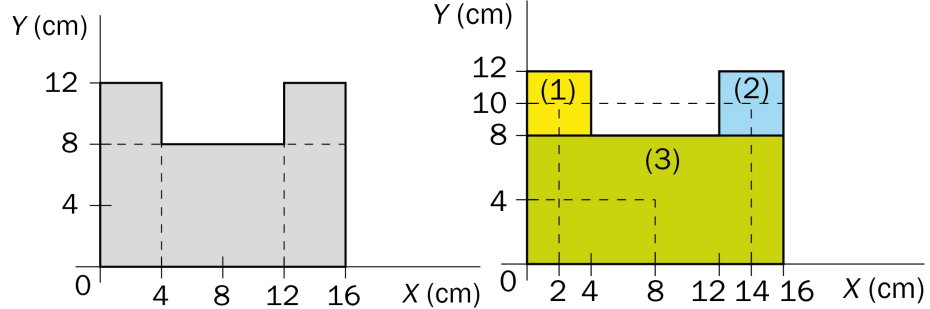


Cal tenir present a l'hora de dibuixar-los en quin **punt** del **pla X o XY o XYZ** se situen!

2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

CENTRE DE MASSES D'UN SÒLID RÍGID

Ex. Quin és el centre de masses de la làmina metàl·lica de la figura que té una massa total de 2,3 kg distribuïda uniformement?



2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

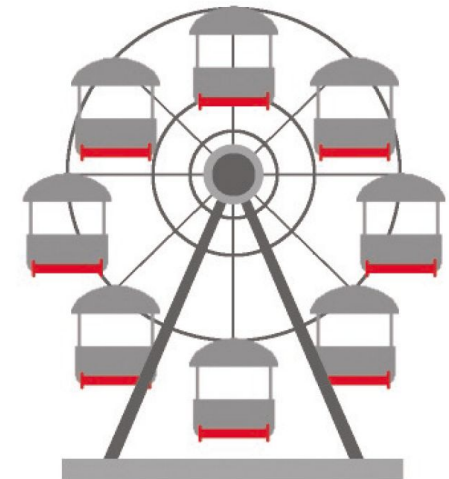
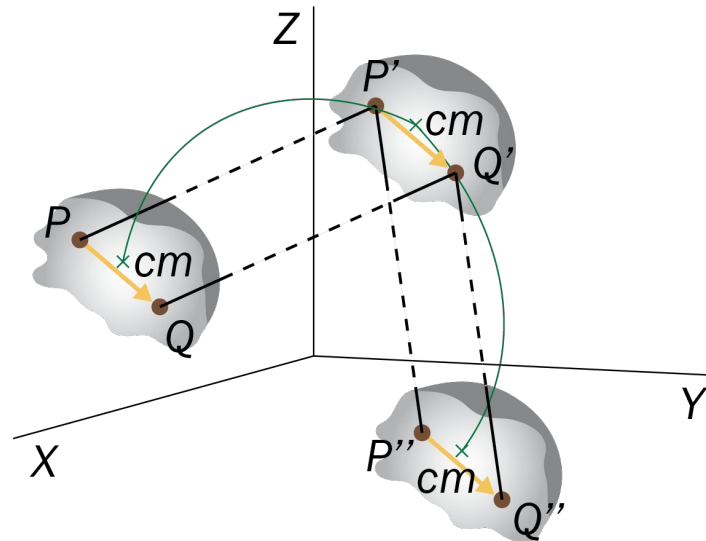
MOVIMENTS D'UN SÒLID RÍGID

Experimenten dos tipus de moviments:

- **Translació:** quan el segment que uneix dues parts qualsevol del sòlid manté la seva direcció durant el moviment, encara que la trajectòria seguida pel cos no sigui rectilínia.

Velocitat de translació a tots els punts iguals

Considerem els cossos com **partícules**



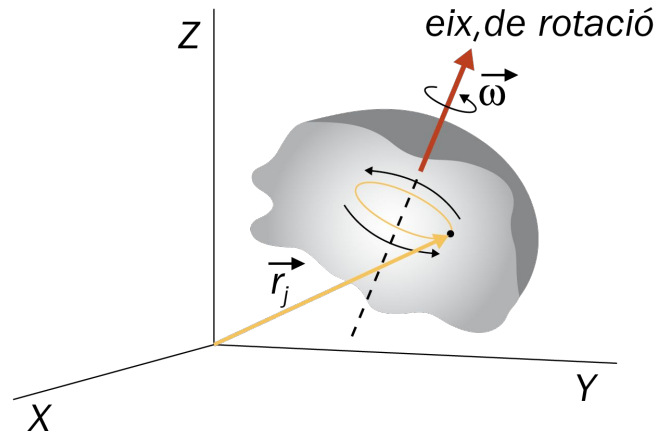
2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

MOVIMENTS D'UN SÒLID RÍGID

Experimenten dos tipus de moviments:

- **Rotació:** quan els punts del sòlid rígid descriuen trajectòries circulars al voltant d'una recta, que anomenem **eix de rotació**, caracteritzades per la velocitat angular ω

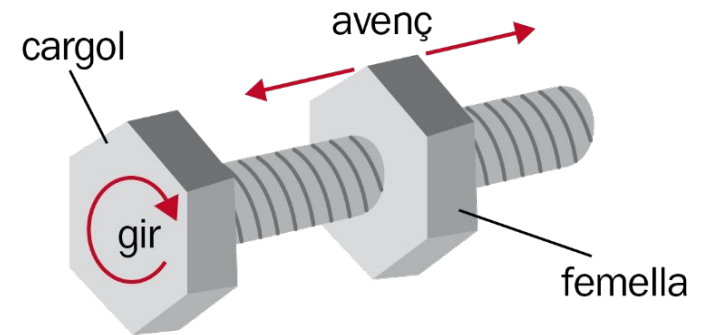
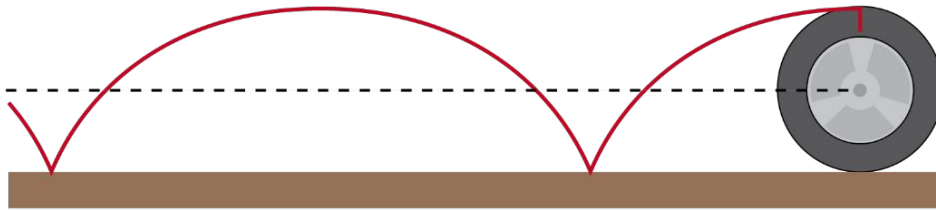
La direcció **de l'eix**
pot ser **fixa** o pot
moure's.



2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

MOVIMENTS D'UN SÒLID RÍGID

Paradigma del moviment → composició de moviment de translació i rotació

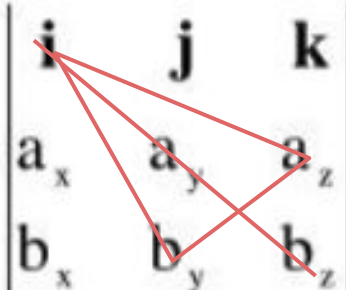


Es tracten de forma independent entre ells i el de rotació com una partícula! → ús del moviment circular (unitat 2) i **moment d'una força** i **moment angular** (primer cal introduir conceptes vectorials nous)

2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

PRODUCTE VECTORIAL DE DOS VECTORS

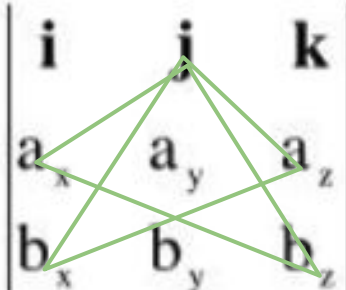
Es calcula mitjançant l'expressió analítica d'un determinant amb les components x , y de cada vector unitari, que genera una combinació lineal amb el nou vector.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i}$$


2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

PRODUCTE VECTORIAL DE DOS VECTORS

Es calcula mitjançant l'expressió analítica d'un determinant amb les components x , y de cada vector unitari, que genera una combinació lineal amb el nou vector.

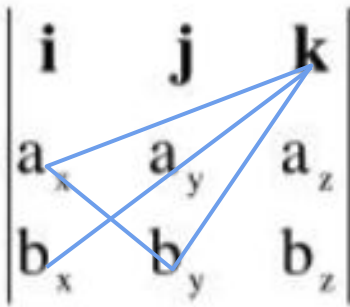
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$


$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j}$$

2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

PRODUCTE VECTORIAL DE DOS VECTORS

Es calcula mitjançant l'expressió analítica d'un determinant amb les components x , y de cada vector unitari, que genera una combinació lineal amb el nou vector.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$


$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

VECTORS AXIALS

És el cas de la velocitat i l'acceleració angulars.

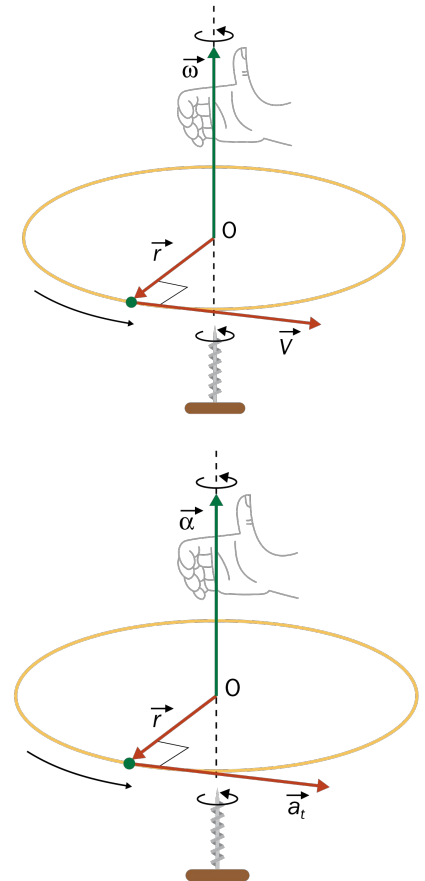
S'utilitza la **regla de la mà dreta** per trobar la direcció i sentit

Velocitat lineal i acceleració tangencial són tangents a la trajectòria → **angle 90°**

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} \rightarrow v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \sin 90 = \omega \cdot r$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \cdot \vec{r} \rightarrow a_t = |\vec{\alpha} \times \vec{r}| = \alpha \cdot r \sin 90 = \alpha \cdot r$$

El dit polze indica el sentit de la ω o α i els dits el sentit de gir de la partícula



2. INTRODUCCIÓ A LA ROTACIÓ DEL SÒLID RÍGID

VECTORS AXIALS

El tambor d'una rentadoa de radi 25 cm gira en sentit horari amb un moviment circular uniformement accelerat quan mirem el tambor des del semieix X positiu, que coincideix amb l'eix de gir del tambor, i inicialment està en repòs.

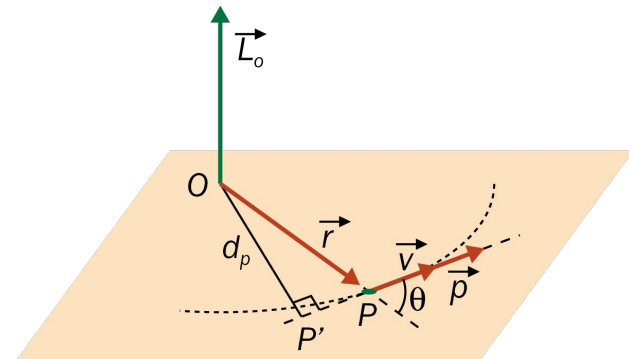
Un punt de la perifèria del tambor es troba inicialment en la posició $r_0 = (0, 0, 25)$ cm, i assoleix la posició $r_1 (0, 25, 0)$ cm passats 1,5 s. Quins són els vectors velocitat i acceleració angulars, i els vectors velocitat lineal, acceleració tangencial i acceleració normal en aquest instant?

3. MOMENT ANGULAR I MOMENT D'INÈRCIA

MOMENT ANGULAR D'UNA PARTÍCULA

Es defineix com $\vec{L}_O$ respecte d'un punt fix O d'una partícula de massa m i velocitat $\vec{v}$, com el producte vectorial del vector de posició respecte d'O, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ per la quantitat de moviment $\vec{p} = m \vec{v}$, sent P qualsevol punt de la recta d'acció del vector $\vec{p}$.

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} \rightarrow \vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$$

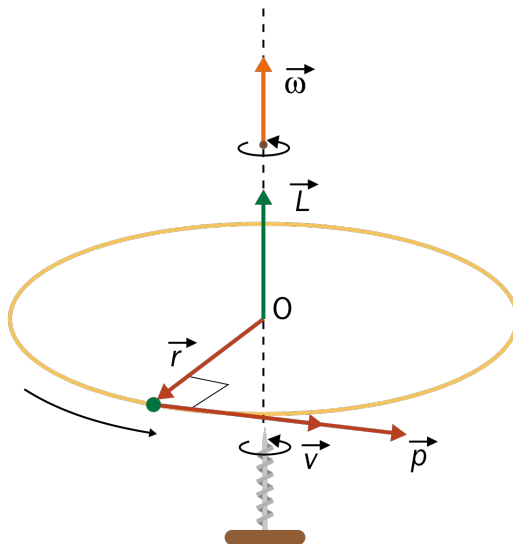


3. MOMENT ANGULAR I MOMENT D'INÈRCIA

MOMENT ANGULAR D'UNA PARTÍCULA

Si la trajectòria és **circular**, el moment angular respecte del centre de la circumferència O és un vector *perpendicular* al pla, i, per tant, té la mateixa direcció i sentit que la velocitat angular $\vec{\omega}$.

(kg · m²/ s)



$$L = m r v \sin 90^\circ = m r v, \text{ ja que } \vec{r} \text{ i } \vec{v}$$

són $\perp$, en ser $\vec{v}$ tangent a la trajectòria i $v = \omega \cdot r \rightarrow$

$$L = m r \omega r = \mathbf{m \omega r^2}$$

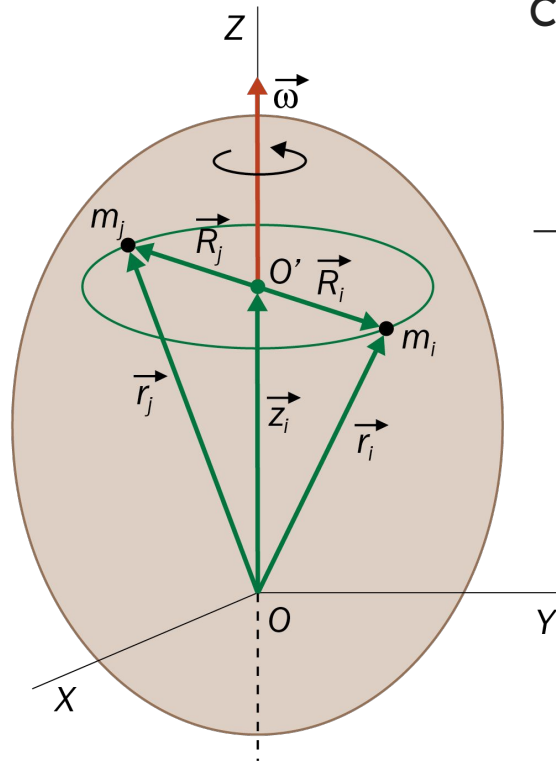
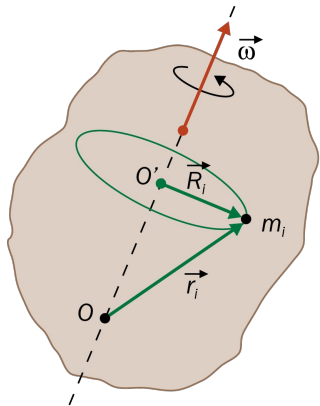
$$I = m r^2 \rightarrow \text{moment d'inèrcia}$$

$$\text{Per tant, també } \vec{L} = I \vec{\omega}$$

3. MOMENT ANGULAR I MOMENT D'INÈRCIA

MOMENT ANGULAR D'UN SÒLID RÍGID

Suposarem sòlids rígids de n partícules de geometria regular i homogènia en el qual l'eix de gir és el Z i passa pel seu centre de masses $\rightarrow$ simetria al voltant de l'eix



Condicions:

$\omega \times z_i = 0 \rightarrow$ mateixa direcció

$\vec{R}_i \cdot \vec{\omega} = 0, \vec{z}_i \cdot \vec{R}_i = 0 \rightarrow$ són $\perp$

$\vec{z}_i \cdot \vec{R}_i = R_i^2, \vec{z}_i \cdot \vec{\omega} = z_i \cos 0 \rightarrow \vec{z}_i \cdot \vec{\omega} = z_i$

ω mateixa direcció

$$\mathbf{L} = m r^2 \omega$$

Per tant $\rightarrow \vec{\mathbf{L}} = I \vec{\omega}$

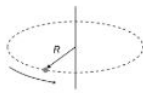
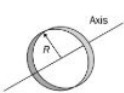
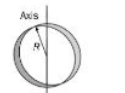
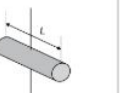
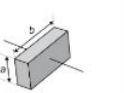
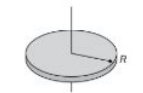
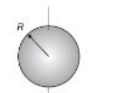
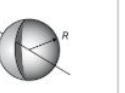
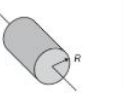
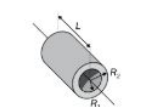
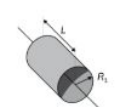
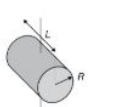
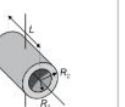
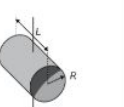
constant de proporcionalitat $\rightarrow$
moment d'inèrcia

3. MOMENT ANGULAR I MOMENT D'INÈRCIA

MOMENT D'INÈRCIA D'UN SÒLID RÍGID

Indica com es distribueix la massa del cos respecte de l'eix de gir (massa pel producte de les distàncies simètriques) → mesura la resistència a patir canvis en el moviment de rotació a l'eix de gir.

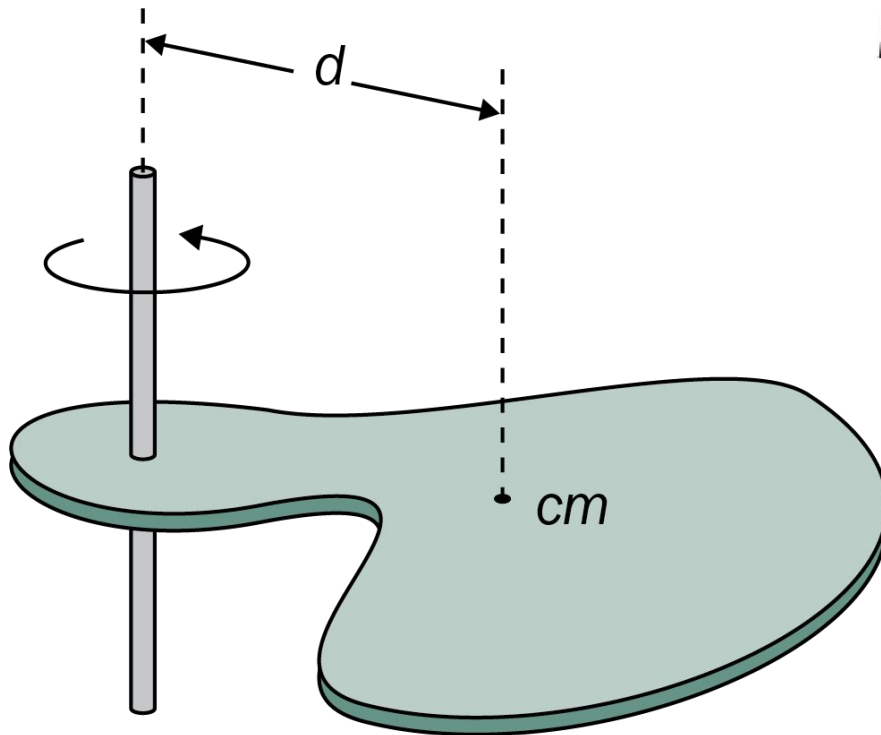
Càlcul complex que simplifiquem
segons la geometria

Moments d'inèrcia				
Partícula que gira amb moviment circular uniforme de radi R	Anella respecte del seu eix	Anella respecte d'un diàmetre	Vareta prima respecte d'un eix que passa pel seu centre	Paral·lelepípede respecte d'un eix perpendicular a una cara que travessa el centre
				
$I = M R^2$	$I = M R^2$	$I = \frac{1}{2} M R^2$	$I = \frac{1}{12} M L^2$	$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$
Disc prim respecte d'un eix perpendicular que passa pel centre	Disc prim respecte d'un eix paral·lel a un diàmetre que passa pel centre	Esfera sòlida respecte d'un eix que passa pel centre:	Escorça esfèrica respecte d'un eix que passa pel centre:	Cilindre massís respecte del seu eix
				
$I = \frac{1}{2} M R^2$	$I = \frac{1}{4} M R^2$	$I = \frac{2}{5} M R^2$	$I = \frac{2}{3} M R^2$	$I = \frac{1}{2} M R^2$
Cilindre semimassís respecte del seu eix	Cilindre buit respecte del seu eix	Cilindre massís respecte d'un diàmetre	Cilindre semimassís respecte d'un diàmetre	Cilindre buit respecte d'un diàmetre
				
$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$	$I = M R^2$	$I = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2$	$I = \frac{1}{4} M (R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{12} M L^2$	$I = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2$

3. MOMENT ANGULAR I MOMENT D'INÈRCIA

MOMENT D'INÈRCIA D'UN SÒLID RÍGID

TEOREMA DE STEINER → Quan volem calcular el moment d'inèrcia i l'eix NO passa pel centre de masses, però que és *paral·lel* i es troba a una distància d .



$$I' = I_{cm} + M d^2$$

Massa total del sòlid

3. MOMENT ANGULAR I MOMENT D'INÈRCIA

MOMENT D'INÈRCIA D'UN SÒLID RÍGID

Ex. Una vareta prima de ferro de 990 g de massa i 60 cm de longitud gira respecte d'un eix perpendicular que passa pel seu centre, amb una velocitat angular de 50 rpm.

- a. Quant valen el seu moment d'inèrcia i el seu moment angular?
- b. D'acord amb el teorema de Steiner, quin és el moment d'inèrcia si la vareta gira respecte d'un eix que passa pel seu extrem? Quin és llavors el moment angular si gira amb la mateixa velocitat angular?
- c. Quins són els resultats anteriors, si el cos és un disc prim e ferro de 8,7 kg de massa i 18 cm de radi que gira a la mateixa velocitat angular de 50 rpm respecte d'un eix paral·lel a un diàmetre que passa pel seu centre?

3. MOMENT ANGULAR I MOMENT D'INÈRCIA

MOMENT D'INÈRCIA D'UN SÒLID RÍGID

Un tub gruixut homogeni de coure, que podem considerar un cilindre semimassís, té un radi interior de 2,5 cm, un radi exterior de 5 cm i una longitud de 15 cm.

Quin és el seu moment d'inèrcia respecte d'un diàmetre que passa pel seu centre de masses, si sabem que la densitat del coure val $8,96 \text{ g/cm}^3$? I respecte d'un diàmetre que passa per l'extrem del tub?