

5.1. Producto escalar

Definición 5.1 Producto escalar

Se llama *producto escalar* a toda aplicación:

$$f : \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

verificando los siguientes axiomas de definición:

Ax.1 $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ si $\vec{u} \neq 0$

Ax.2 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. (Propiedad conmutativa)

Ax.3 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. (Distributiva respecto de la suma de vectores).

Ax.4 $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ejemplo

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Siendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

Propiedades

(a) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = 0$ (b) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0 \quad \forall \vec{u} \in V_3$

Definición 5.2 Matriz asociada al producto escalar

Sea $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ una base de $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ y $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores libres de coordenadas respecto de la base: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Aplicando las propiedades del producto escalar y del espacio vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1 \vec{u}_1 + y_1 \vec{u}_2 + z_1 \vec{u}_3) \cdot (x_2 \vec{u}_1 + y_2 \vec{u}_2 + z_2 \vec{u}_3) = \\ &= (x_1 x_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + (x_1 y_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + (x_1 z_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) + (y_1 x_2)(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) + (y_1 y_2)(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2) + (y_1 z_2)(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3) + \\ &+ (z_1 x_2)(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) + (z_1 y_2)(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) + (z_1 z_2)(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3) \end{aligned}$$

Es la expresión coordenada del producto escalar. Empleando las matrices:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Por la definición de producto escalar, la matriz es simétrica y su diagonal principal positiva.

Para calcular el producto escalar bastará conocer los productos escalares de los elementos de la base elegida entre sí.

Definición 5.3 Espacio vectorial euclídeo

Sea V_3 un espacio vectorial real tridimensional y $\cdot$ un producto escalar definido en él. El par formado por $(V_3, \cdot)$ recibe el nombre de **espacio vectorial euclídeo**.

Definición 5.4 (Espacio afín euclídeo) Sea $\mathcal{E}$ el espacio de los puntos, $(V_3(\mathbb{R}), \cdot)$ el espacio vectorial euclídeo de dimensión tres y f la aplicación que asociaba puntos con vectores, entonces a la terna $(\mathcal{E}, (V_3(\mathbb{R}), \cdot), f)$ se llama **espacio afín euclídeo**.

Definición 5.5 Norma de un vector

Sea $\vec{u} \in V_3$ se llama **norma** del vector $\vec{u}$ y se denota $\|\vec{u}\|$ a la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector $\vec{u}$ por sí mismo:

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Propiedades de la norma

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$
2. $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
4. Desigualdad triangular: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
5. $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

Siendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y con la definición del producto escalar del ejemplo anterior.

Ejemplo:

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Definición 5.6 Espacio vectorial normado

A un espacio vectorial en el cual se define una norma, recibe el nombre de **espacio normado**

Definición 5.7 Vector unitario

Sea $\vec{u}$ un vector de un espacio vectorial normado, diremos que el vector es **unitario** si su norma es igual a uno: $\|\vec{u}\| = 1$

Ejemplo:

Los vectores de la base canónica son unitarios: $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$
 Por ejemplo: $\|\vec{e}_1\| = +\sqrt{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} = +\sqrt{1} = 1$

Definición 5.8 Vectores ortogonales

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Ejemplo:

Los vectores de la base canónica son ortogonales dos a dos.
 Por ejemplo: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

Proposición 5.1 *Tres vectores, no nulos, de $\mathcal{V}_3$, dos a dos ortogonales forman una base del espacio vectorial.*

Demostración

Dada la familia de vectores $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ortogonales dos a dos y no nulos. Supongamos que uno de los vectores, $\vec{u}$, es combinación lineal de los otros.

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

Multiplicando escalarmente por el vector $\vec{u}$ y aplicando las propiedades del producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w})$$

Por hipótesis son ortogonales dos a dos :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Si el producto escalar de un vector por sí mismo es nulo implica que el vector $\vec{u}$ es el vector nulo (Contradicción), por tanto los vectores de la familia son no nulos.

Por lo tanto los vectores son linealmente independientes y aplicando las consecuencias del teorema de Steinitz, forman una base del espacio vectorial $\mathcal{V}_3$.

Definición 5.9 Base ortonormal

Una base de un espacio vectorial euclídeo es **ortonormal** si sus vectores son unitarios y ortogonales dos a dos.

Ejemplo: La base canónica $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base ortonormal.

Proposición 5.2 Expresión del producto escalar en una base ortonormal

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y los vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Y la expresión (5.2):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Por ser una base ortonormal:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Expresión analítica del producto escalar en una base ortonormal (canónica).

5.2. Ángulos entre vectores

Definición 5.10 Ángulo de dos vectores

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ dos vectores no nulos. Se llama ángulo formado por los dos vectores, y se denota por $(\vec{u}, \vec{v})$ al menor de los ángulos formado por dos de sus representantes con origen común.

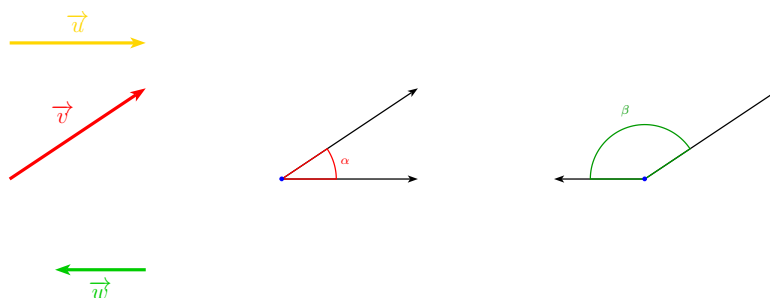


Figura 5.1: Ángulo de dos vectores

Definición 5.11 Coseno del ángulo de dos vectores

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ dos vectores no nulos. Se llama coseno del ángulo formado por los dos vectores, y se denota por $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ al número real:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad (5.1)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las propiedades del valor absoluto de un número real:

$$-\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

y siendo los vectores no nulos:

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1$$

por lo tanto se demuestra vectorialmente que:

$$-1 \leq \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1$$

Definición 5.12 Seno del ángulo de dos vectores

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ dos vectores no nulos. Se llama seno del ángulo formado por los vectores:

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = +\sqrt{1 - \cos^2(\vec{u}, \vec{v})} \quad (5.2)$$

Teniendo en cuenta que el ángulo de dos vectores está comprendido en el intervalo $[0, \pi]$ el seno siempre es positivo

Definición 5.13 Producto escalar en forma clásica

De la definición (5.1) se deduce:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ó } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Es la definición clásica del producto escalar de dos vectores.

Proposición 5.3 Expresión analítica del producto escalar

Consideremos una base ortonormal del espacio vectorial y los vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ entonces:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Definición 5.14 Cosenos directores

Se llaman cosenos directores del vector $\vec{u}$, los cosenos de los ángulos que forman los vectores de la base con el vector $\vec{u}$.

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal. Los cosenos directores del vector $\vec{u} = (x, y, z)$ son

- $\cos(\vec{u}_1, \vec{u}) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- $\cos(\vec{u}_2, \vec{u}) = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}_2\| \|\vec{u}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- $\cos(\vec{u}_3, \vec{u}) = \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}_3\| \|\vec{u}\|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Calcular los cosenos directores del vector $\vec{u} = (3, -4, 5)$ respecto de la base canónica.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\vec{e}_1, \vec{u}) &= \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \blacksquare \cos(\vec{e}_2, \vec{u}) &= \frac{-4}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{-4}{5\sqrt{2}} \\ \blacksquare \cos(\vec{e}_3, \vec{u}) &= \frac{5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

5.3. Producto vectorial

Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal del espacio vectorial.

Definición 5.15 Producto vectorial

Llamamos **producto vectorial** de dos vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y lo denotaremos por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ al vector de $\mathcal{V}_3$ de coordenadas:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3$$

La manera más fácil de recordar el producto vectorial es en forma de determinante:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto vectorial

- (1) Anticonmutativa: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- (2) Distributiva: $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- (3) Asociativa escalares: $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- (4) $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$
- (5) El vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- (6) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$
- (7) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$
- (8) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ y los vectores son **no nulos** entonces $\vec{u} \parallel \vec{v}$

Las demostraciones de las propiedades se dejan al lector.

5.3.1. Interpretación geométrica del producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos y sus representantes $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con origen común:

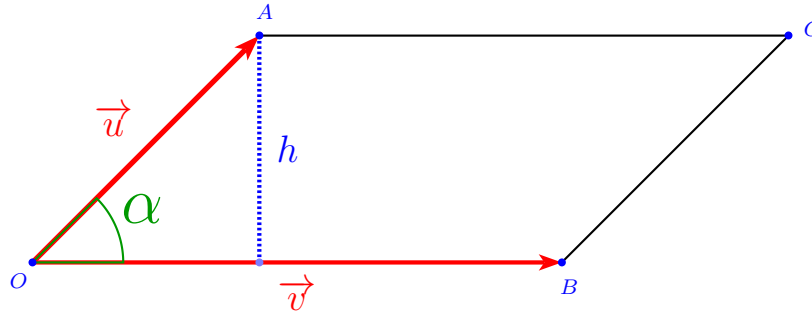


Figura 5.2: Interpretación geométrica del producto vectorial

Construimos el paralelogramo $OACB$ y trazamos la altura correspondiente al lado OB .

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \frac{h}{\|\vec{u}\|} = \|\vec{v}\| \cdot h$$

El módulo (norma) del producto vectorial de dos vectores es igual al **área del paralelogramo** que tiene por lados dichos vectores (Fig. 5.2).

Proposición 5.4 Área de un triángulo

Sea el triángulo de vértices A , B y C . Construimos los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. La superficie del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo de vértices $ABCD$ (fig.(5.3)).

$$\text{Área del triángulo } ABC = \frac{1}{2} \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

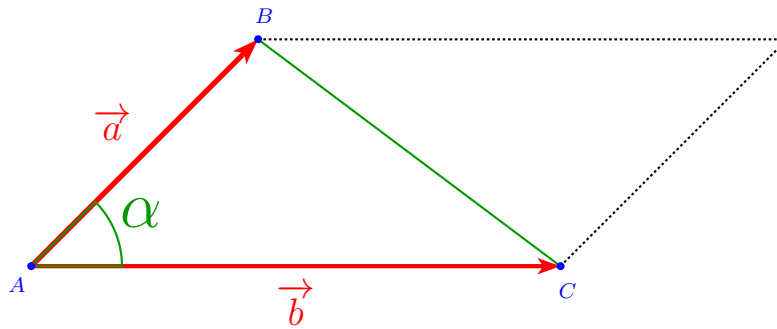


Figura 5.3: Área de un triángulo

Proposición 5.5 Área de un polígono

Para calcular el área de un polígono cualquiera, basta descomponerlo en triángulos.

5.4. Producto mixto

Definición 5.16 Producto mixto

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ se llama *producto mixto* de los vectores, y se denota $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ al número real: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

$$[\]: \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \longmapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Proposición 5.6 Expresión coordenada del producto mixto

Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal y las coordenadas de los vectores respecto de dicha base son:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$$

por la expresión coordenada del producto escalar y del producto vectorial:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (x_1, y_1, z_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto mixto

$$(1) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ son linealmente dependientes}$$

$$(2) [a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}] = abc[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$(3) [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$$

$$(4) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

$$(5) \text{ Antisimétrica: } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$

Las demostraciones se basan en las propiedades de los determinantes y se dejan para el lector.

5.4.1. Interpretación geométrica del producto mixto

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tres vectores no coplanarios del espacio vectorial $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$. Consideramos el paralelepípedo de aristas dichos vectores y de altura h (Fig. 5.4).

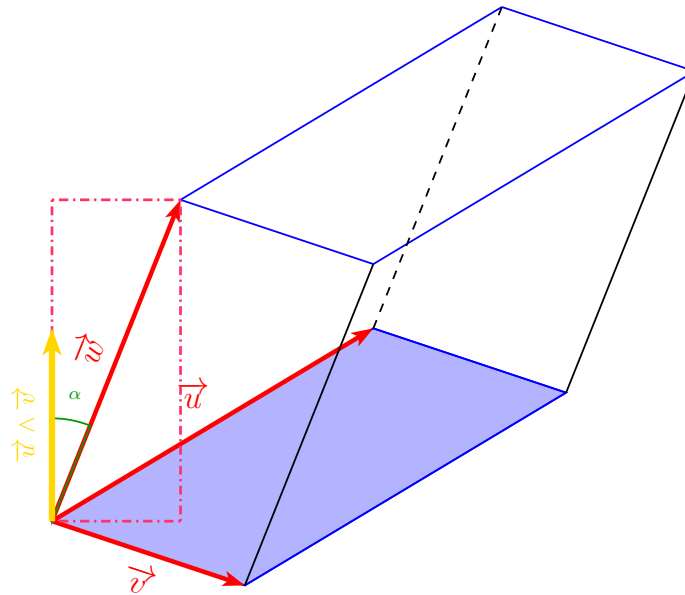


Figura 5.4: Interpretación geométrica producto mixto

Por definición de producto vectorial el vector $\vec{v} \wedge \vec{w}$ tiene la misma dirección que h y el ángulo formado será α o su suplementario $\pi - \alpha$

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cos(\vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w}) = \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| (\pm \cos \alpha) = \pm \|\vec{u}\| \cdot S \cdot \frac{h}{\|\vec{u}\|} = \pm S \cdot h = \pm \text{Volumen} \end{aligned}$$

Volumen del paralelepípedo es igual al **valor absoluto del producto mixto** de los tres vectores que lo forman.

5.4.1.1. Volumen del prisma triangular

Un paralelepípedo se descompone en dos prismas triangulares iguales. Por tanto, el volumen del prisma triangular es la mitad del volumen del paralelepípedo.

$$V = \frac{1}{2} \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right|$$

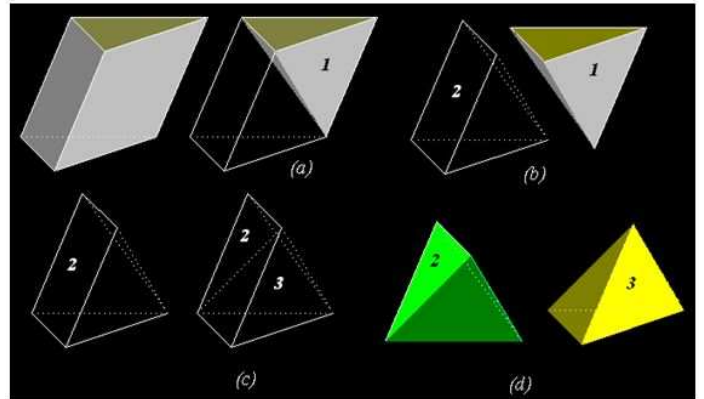
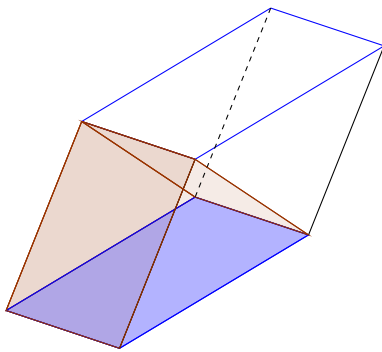


Figura 5.5: Volúmenes de distintos poliedros

5.4.1.2. Volumen del tetraedro

Un prisma de base triangular se descompone en tres tetraedros iguales. Por tanto, el volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo.

$$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right|$$

5.4.1.3. Volumen de un poliedro

Cualquier poliedro se puede descomponer en tetraedros por lo tanto el volumen del poliedro será la suma de los volúmenes de los tetraedros en los cuales se ha descompuesto.

5.5. Problemas métricos

5.5.1. Ecuación normal del plano

Consideramos $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal del espacio euclídeo. Y el plano π determinado por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y los vectores directores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ su ecuación implícita es:

$$\pi \equiv A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (5.3)$$

donde:

$$A = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Sea $X = (x, y, z)$ un punto genérico del plano entonces el vector

$$\overrightarrow{PX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

también es un vector del plano π .

Llamando $\vec{n} = (A, B, C)$ se verifica:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$$

Efectivamente, por la expresión cartesiana del producto escalar en una base ortonormal:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = (A, B, C) \cdot ((x - x_0, y - y_0, z - z_0)) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5.3) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \iff \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad (5.4)$$

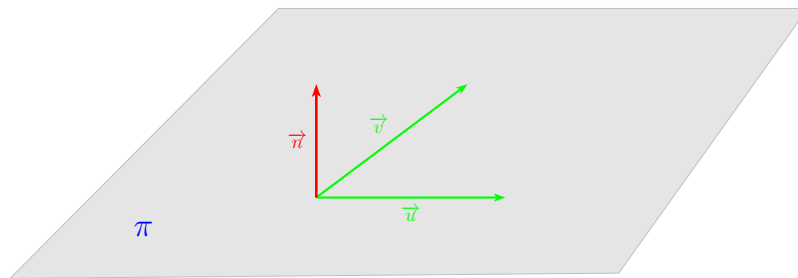


Figura 5.6: Vector normal del plano π

La expresión (5.4) recibe el nombre de **ecuación normal del plano** y el vector $\vec{n}$ de **vector normal** o **característico** del plano π . Aplicando la definición del producto vectorial:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = A \vec{u}_1 + B \vec{u}_2 + C \vec{u}_3$$

Consecuencias

☞ El vector característico es igual al producto vectorial de los vectores directores del plano.

$$\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = (A, B, C)$$

☞ Por las propiedades del producto vectorial, el vector normal es ortogonal a los vectores directores del plano:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$$

En el desarrollo posterior vamos a considerar como base ortonormal la base canónica $\mathcal{B}_c = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

5.5.1.1. Normalización de la ecuación implícita

Sea $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ de vector característico $\vec{n} = (A, B, C)$ y su norma $\|\vec{n}\| = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Dividiendo la ecuación por la norma:

$$\frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Recibe el nombre de **ecuación canónica** del plano π .

Definición 5.17 Cosenos directores del plano

Se llaman *cosenos directores* del plano π , a los cosenos de los ángulos que forma el vector normal con los vectores de la base.

$$\cos(\vec{n}, \vec{i}) = \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos(\vec{n}, \vec{j}) = \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos(\vec{n}, \vec{k}) = \frac{C}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.5.1.2. Paralelismo entre planos

Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si sus vectores normales tienen la misma dirección.

Sean $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ sus vectores normales son $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ entonces:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \text{rang}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 \iff \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

5.5.1.3. Haz de planos paralelos

Dado el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ se llama haz de planos paralelos al plano π al conjunto de todos los planos paralelos a π .

La ecuación del haz de planos es: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ siendo $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera del espacio.

5.5.2. Ecuación normal de la recta

Dada la recta $r \equiv (P, \vec{u})$ como intersección de dos planos y aplicando la ecuación normal del plano (5.4):

$$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Las ecuaciones (5.5) reciben el nombre de ecuación normal de la recta siendo:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

Consecuencia

El vector director de la recta ($\vec{u}$) es vector director de los dos planos, por lo tanto:

$$\vec{u} \perp \vec{n}_1 \quad \text{y} \quad \vec{u} \perp \vec{n}_2$$

Aplicando las propiedades del producto vectorial:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

5.5.3. Ángulos de dos rectas

Sean las rectas $r(P, \vec{u})$ y $s(Q, \vec{v})$

Definición 5.18 (Ángulo de dos rectas) Se llama *ángulo* formado por las rectas r y s al menor de los ángulos que forman los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Definición 5.19 Medida del ángulo de dos rectas

Se llama *medida del ángulo* formado por las rectas r y s al número real α que verifica

$$\blacksquare \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad \blacksquare 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Si las rectas vienen dadas en forma continua:

$$r \equiv \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3} \quad s \equiv \frac{x - x_2}{v_1} = \frac{y - y_2}{v_2} = \frac{z - z_2}{v_3}$$

denotando por α el ángulo de las dos rectas: $\cos \alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$

5.5.3.1. Perpendicularidad entre rectas

Definición 5.20 Dos rectas son perpendiculares si lo son sus vectores direccionales.

$$r \perp s \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Siendo $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ entonces:

$$r \perp s \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

5.5.4. Ángulos de dos planos

Sean los planos $\pi \equiv (P, \vec{n}_1)$ y $\pi' \equiv (Q, \vec{n}_2)$

Definición 5.21 Ángulo de dos planos

Se llama ángulo formado por los planos π y π' al menor de los ángulos que forman los vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

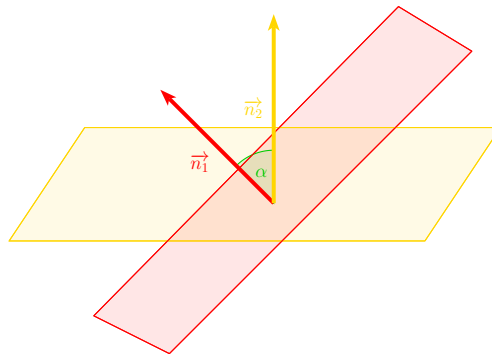


Figura 5.7: Ángulo entre dos planos

Definición 5.22 Medida del ángulo de dos planos

Se llama medida del ángulo formado por los planos π y π' al número real α que verifica:

$$\blacksquare \cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \quad \blacksquare 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

5.5.4.1. Perpendicularidad entre planos

Definición 5.23 Dos planos son perpendiculares si lo son sus vectores normales.

$$\pi \perp \pi' \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Siendo $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ entonces:

$$\pi \perp \pi' \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

5.5.5. Ángulos de recta y plano

Sea la recta $r \equiv (P, \vec{u})$ y el plano $\pi(Q, \vec{n})$

Definición 5.24 Ángulo de recta y plano

Se llama ángulo formado por la recta y el plano al ángulo formado por la recta y la **proyección** de ésta sobre el plano.

Dicho ángulo es el **complementario** del ángulo formado por el vector director de la recta y el normal del plano.

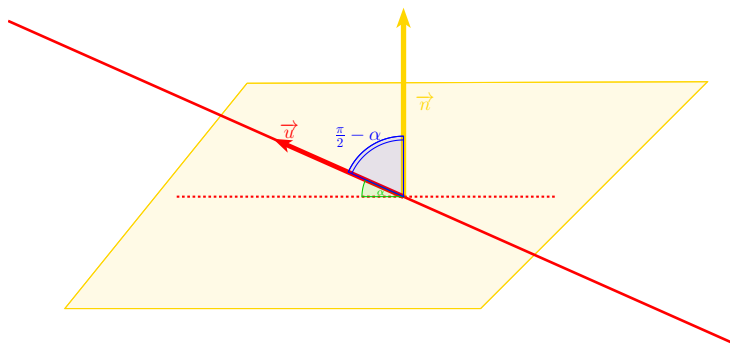


Figura 5.8: Ángulo de recta y plano

Definición 5.25 Medida del ángulo de recta y plano

Se llama medida del ángulo formado por la recta r y el plano π al número real α que verifica:

- $\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|}$
- $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

En forma implícita:

$$r \equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

entonces:

$$\sin \alpha = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.5.5.1. Perpendicularidad de recta y plano

Definición 5.26 Una recta y un plano son perpendiculares si el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos.

$$r \perp \pi \iff \vec{u} \parallel \vec{n} \iff \text{rang}(\vec{u}, \vec{n}) = 1$$

Si $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{n} = (A, B, C)$ entonces: $r \perp \pi \iff \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ siendo $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

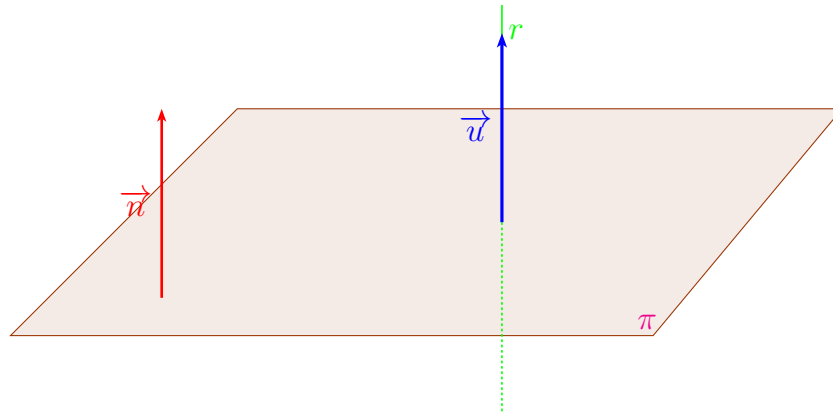


Figura 5.9: Perpendicularidad entre recta y plano

5.5.5.2. Paralelismo de recta y plano

Definición 5.27 Una recta y un plano son paralelos si el vector director de la recta y el vector normal del plano son **perpendiculares**.

$$r \parallel \pi \iff \vec{u} \perp \vec{n} \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

Si $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{n} = (A, B, C)$ entonces: $r \parallel \pi \iff aA + bB + cC = 0$

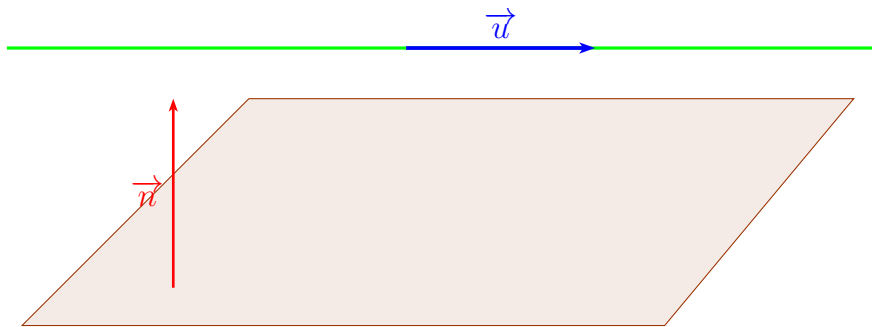


Figura 5.10: Paralelismo de recta y plano

5.5.6. Distancia entre puntos

Definición 5.28 Sean P y Q dos puntos del espacio afín euclídeo. Se llama distancia del punto P al punto Q y se denota por $d(P, Q)$ a la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$.

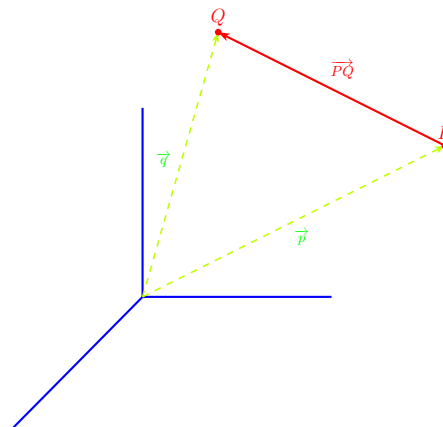


Figura 5.11: Distancia entre dos puntos

Si las coordenadas de los puntos son: $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$, la expresión cartesiana de la distancia es:

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\vec{q} - \vec{p}\| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

5.5.7. Distancia de un punto a un plano

Definición 5.29 Se llama distancia del punto P al plano π y se denota por $d(P, \pi)$ a la norma del vector $\overrightarrow{PP'}$ donde P' es el punto de intersección del plano π con la recta perpendicular al plano por el punto P .

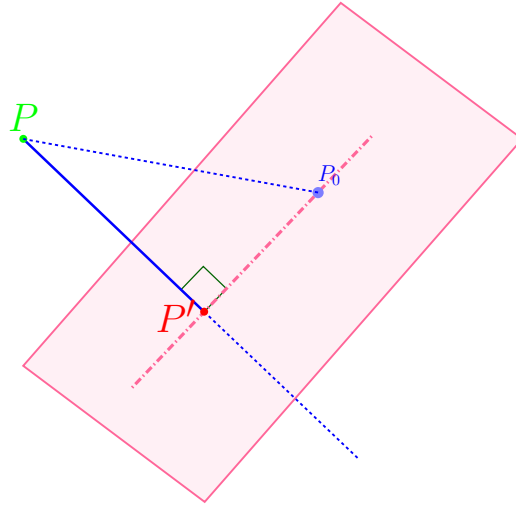


Figura 5.12: Distancia de un punto a un plano

Sea $\pi \equiv (P_0, \vec{n})$ siendo el vector $\vec{n}$ **unitario** y $r \perp \pi$ pasando por el punto P . Por la definición de coseno en el triángulo rectángulo de vértices $PP'P_0$:

$$|\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})| = \frac{\|\overrightarrow{PP'}\|}{\|\overrightarrow{P_0P}\|} \implies \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{P_0P}\| \cdot \cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})$$

Al considerar que el vector $\vec{n}$ es unitario:

$$\|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{P_0P}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}) = |\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|$$

Por lo tanto:

$$\boxed{d(P, \pi) = |\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|}$$

En forma cartesiana: Si $P(x_1, y_1, z_1)$, $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$
 $\overrightarrow{P_0P} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$; $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C)$

$$d(P, \pi) = |\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}| = \left| (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Efectuando el producto escalar y que el punto $P_0 \in \pi \iff Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

5.5.7.1. Casos particulares

- Si $P \in \pi$ entonces $d(P, \pi) = 0$.
- Si el punto P es el origen de coordenadas entonces: $d(O, \pi) = \left| \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$. La distancia del origen a un plano es el valor absoluto del término independiente de la ecuación normal canónica del plano.

5.5.8. Distancia entre planos

Definición 5.30 Se llama distancia del plano π al plano π' y se denota por $|d(\pi, \pi')|$ al número real: $\text{mínimo}\{d(P, Q) \mid P \in \pi \text{ y } Q \in \pi'\}$.

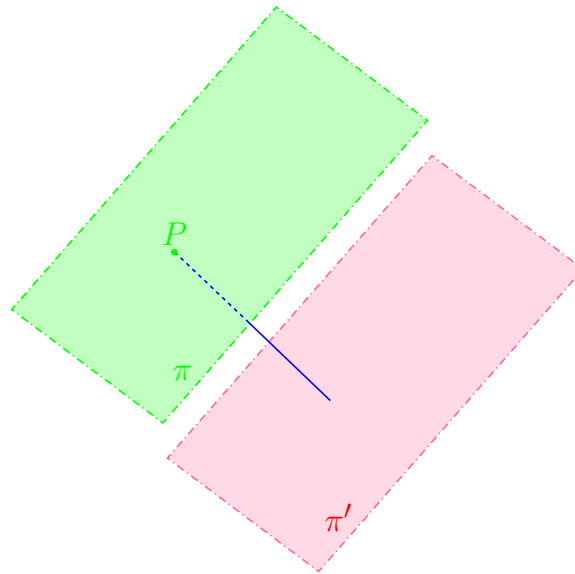


Figura 5.13: Distancia entre planos

Teniendo en cuenta la posición relativa de dos planos en el espacio:

- Si los planos son secantes $\pi \cap \pi' = r$ la $d(\pi, \pi') = 0$
- Si los planos son coincidentes $\pi \equiv \pi'$ la $d(\pi, \pi') = 0$
- Si los planos son paralelos $\pi \parallel \pi'$ la $d(\pi, \pi') = d(P, \pi')$ siendo P un punto cualquiera del plano π .

En efecto sean $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv Ax + By + Cz + D' = 0$ dos planos paralelos estrictos $D \neq D'$. Entonces:

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Como $P \in \pi$ verifica la ecuación del plano $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, sustituyendo:

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \left| \frac{D' - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Ecuación analítica de la distancia entre dos planos paralelos estrictos.

5.5.9. Distancia de punto a recta

Definición 5.31 Se llama distancia del punto P a la recta $r \equiv (P_0, \vec{u})$ y se denota por $d(P, r)$ a la norma del vector $\overrightarrow{PP'}$, donde P' es el punto intersección de la recta dada r con el plano perpendicular a ella que pasa por el punto P .

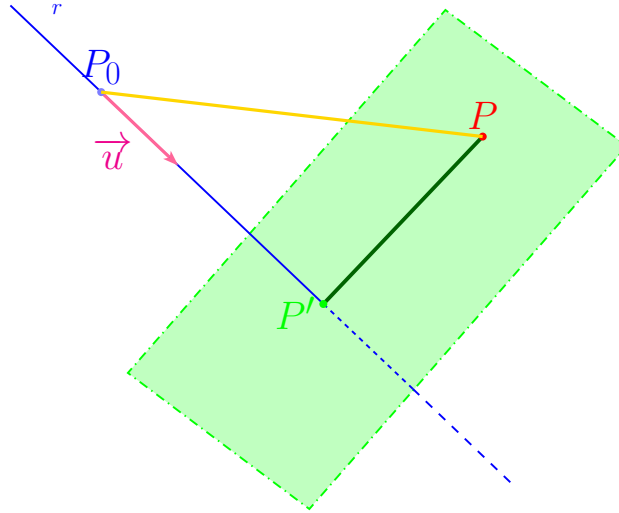


Figura 5.14: Distancia de un punto a una recta

Definición de seno en un triángulo rectángulo: $\sin \alpha = \frac{\|\overrightarrow{PP'}\|}{\|\overrightarrow{P_0P}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{P_0P}\| \sin(\vec{u}, \overrightarrow{P_0P})$

El vector $\vec{u}$ es vector director de la recta, es decir, no nulo:

$$\|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_0P}\| \|\vec{u}\| \sin(\vec{u}, \overrightarrow{P_0P})}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Por lo tanto:

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\vec{u}\|}$$

5.5.10. Distancia entre rectas

Definición 5.32 Se llama distancia de la recta r a la recta s y se denota por $|d(r, s)|$ al número real: $\text{mínimo}\{d(P, Q) \mid P \in r \text{ y } Q \in s\}$.

Teniendo en cuenta la posición relativa de dos rectas en el espacio:

- Las rectas son secantes o coincidentes entonces $d(r, s) = 0$.
- Las rectas son paralelas estrictas:

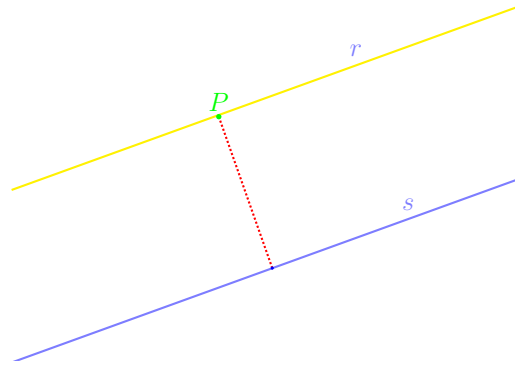


Figura 5.15: Distancia entre rectas paralelas

$$r \equiv \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad s \equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Considerando un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la recta r la distancia entre rectas paralelas es igual a la distancia del punto P a la recta s .

$$d(r, s) = d(P, s) \quad \text{siendo} \quad P \in r$$

- Las rectas se cruzan.

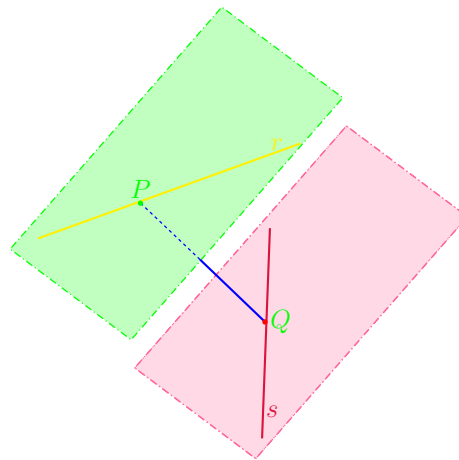


Figura 5.16: Distancia entre rectas se cruzan

Sean $r \equiv (P, \vec{u})$ y $s \equiv (Q, \vec{v})$, construimos los planos:

- π paralelo a la recta s y que pase por la recta r .
- σ paralelo a la recta r y que pase por la recta s .

Los planos así contruidos son paralelos y su vector normal es $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\pi \equiv (P, \vec{n}) \quad \sigma \equiv (Q, \vec{n})$$

La distancia entre las dos rectas será la distancia entre los dos planos paralelos, aplicando la fórmula de la distancia:

$$d(r, s) = d(\pi, \sigma) = d(P, \sigma) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Expresión analítica de la distancia entre dos rectas que se cruzan.

Sean las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{b_1} = \frac{z - z_0}{c_1} \quad s \equiv \frac{x - x_1}{a_2} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{c_2}$$

Entonces:

$$[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

$$d(r, s) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

5.5.11. Problemas de simetría

5.5.11.1. Simétrico de un punto respecto de un plano

Hallar el punto simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$.

- Si $P \in \pi$ entonces su simétrico es el mismo punto P .
- Sea P exterior al plano π y P' su simétrico.

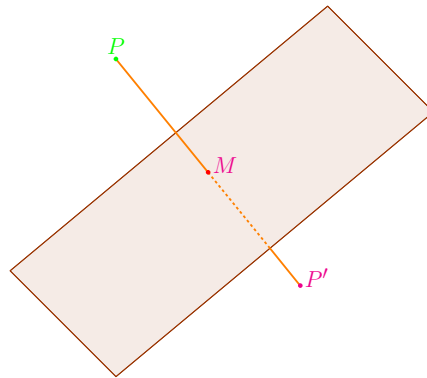


Figura 5.17: Simétrico de un punto respecto a un plano

Trazamos la recta r perpendicular al plano π y por el punto P . Sea M el punto de intersección de la recta r y el plano π . El punto M es el punto medio del segmento de extremos P y P' . Calculadas las coordenadas del punto medio y conocidas las del extremo P se calculan las coordenadas del punto simétrico P' .

5.5.11.2. Simétrico de un punto respecto de una recta

Hallar el punto simétrico de P respecto de la recta $r \equiv (Q, \vec{u})$.

- Si $P \in r$ entonces su simétrico es el mismo punto P .
- Sea P exterior a la recta r y P' su simétrico.

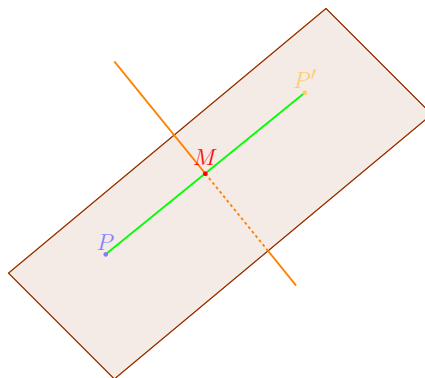


Figura 5.18: Simétrico de un punto respecto a una recta

Trazamos el plano π perpendicular a la recta r y por el punto P . Sea M el punto de intersección de la recta r y el plano π . El punto M es el punto medio del segmento de extremos P y P' . Calculadas las coordenadas del punto medio, M , y conocidas las del extremo, P , se calculan las coordenadas del simétrico P' .

5.5.12. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan**5.5.12.1. Las rectas vienen dadas en forma vectorial****1. En forma vectorial**

Sean $r \equiv (P_0, \vec{u})$ y $s \equiv (Q_0, \vec{v})$:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = x_1 + \mu v_1 \\ y = y_1 + \mu v_2 \\ z = z_1 + \mu v_3 \end{cases}$$

Sea t la recta perpendicular común que es secante a las dos rectas. Sean P y Q los puntos de corte con r y s , respectivamente.

Por pertenecer $P \in r$ sus coordenadas son $P(x_0 + \lambda u_1, y_0 + \lambda u_2, z_0 + \lambda u_3)$ para un valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por pertenecer $Q \in s$ sus coordenadas son $Q(x_1 + \mu v_1, y_1 + \mu v_2, z_1 + \mu v_3)$ para un valor de $\mu \in \mathbb{R}$.

Construimos el vector $\overrightarrow{PQ}$ director de la recta t perpendicular. Entonces:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u} &\iff (u_1, u_2, u_3) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \perp \vec{v} &\iff (v_1, v_2, v_3) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las ecuaciones (5.6) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas λ y μ . Una vez resuelto el sistema y sustituyendo en las coordenadas de los puntos y en el vector $\overrightarrow{PQ}$ obtenemos la ecuación de la perpendicular común $s \equiv (P, \overrightarrow{PQ})$.

2. En forma intersección de dos planos

El vector director de la perpendicular común t será $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ por ser perpendicular a las dos rectas.

Construimos los siguientes planos:

- Plano determinado por la recta r y el vector $\vec{w}$: $\pi \equiv (P, \vec{u}, \vec{w})$.
- Plano determinado por la recta s y el vector $\vec{w}$: $\sigma \equiv (Q, \vec{v}, \vec{w})$.

La intersección de los dos planos es la recta perpendicular a r y s

$$t \equiv \pi \cap \sigma$$

5.5.12.2. Las rectas vienen dadas como intersección de planos

Dadas $r \equiv \pi \cap \pi'$ y $s \equiv \sigma \cap \sigma'$. Los planos cuya intersección es la perpendicular común t pertenecerán a los haces de planos de aristas r y s .

Construimos los siguientes planos:

- Plano α del haz determinado por la recta r y perpendicular a la recta s .
- Plano β del haz determinado por la recta s y perpendicular a la recta r .

La intersección de los dos planos es la recta perpendicular a r y s

$$s \equiv \alpha \cap \beta$$

En la práctica depende del enunciado del problema para utilizar uno de los métodos anteriores.

Ejercicios

Hallar las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = -9 + 2\mu \\ z = -12 - \mu \end{cases}$$

Sean $P(-7 + 3\lambda, 4 - 2\lambda, 3\lambda)$ y $Q(1 + 3\mu, -9 + 2\mu, -12 - \mu)$ los puntos de corte con r y s de la recta s perpendicular común.

El vector director de la recta s será un vector $\overrightarrow{PQ}$ perpendicular a los dos vectores directores de las rectas.

$$\overrightarrow{PQ} = (8 - 3\lambda + \mu, -13 + 2\lambda + 2\mu, -16 - 3\lambda - \mu)$$

Aplicando la ortogonalidad de los vectores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u} &\implies (3, -2, 3) \cdot (8 - 3\lambda + \mu, -13 + 2\lambda + 2\mu, -16 - 3\lambda - \mu) = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \perp \vec{v} &\implies (1, 2, -1) \cdot (8 - 3\lambda + \mu, -13 + 2\lambda + 2\mu, -16 - 3\lambda - \mu) = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 11\lambda + 2\mu = 1 \\ 2\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{29} \\ \mu = \frac{2}{29} \end{cases}$

Sustituyendo en el vector $\overrightarrow{PQ} = (\frac{238}{29}, -\frac{357}{29}, -\frac{476}{29})$.

Simplificando el vector director de la perpendicular común: $\vec{w} = (2, -3, -4)$.

Tomando el punto $P(-\frac{200}{29}, \frac{114}{29}, \frac{119}{29})$. La ecuación de la recta pedida en forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = -\frac{200}{29} + 2\alpha \\ y = \frac{114}{29} - 3\alpha \\ z = \frac{119}{29} - 4\alpha \end{cases}$$