

Definición de función continua

Definición I

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

- 1 $a \in D_f$
- 2 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}.$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = f(a).$

Definición II

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



Definición de discontinuidad.

Si una función NO es continua en $x = a$ entonces es discontinua en $a \in \mathbb{R}$

Definición de discontinuidad evitable

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua evitable** en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{cases} a \notin D_f \\ \circ \\ \text{Si } a \in D_f \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \end{cases}$$

Definición de discontinuidad de salto finito

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua de salto finito** en $a \in \mathbb{R}$ si existen los dos límites laterales son finitos pero distintos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \\ y \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \end{array} \right. \implies \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Definición de salto

Si en $x = a \in \mathbb{R}$ presenta una discontinuidad de salto, se llama salto de la función a la diferencia entre el límite por al derecha y el límite por la izquierda.

$$\Delta f = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = m - l$$



Definición de discontinuidad asintótica

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua asintótica** en $a \in \mathbb{R}$ si, al menos, UNO de los límites laterales tiende a INFINITO

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases}$$



Definición de tasa de variación media

Definición

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama tasa de variación media en el intervalo $[a, b] \subset D_f$, al cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente.

$$T.V.M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica de la TVM

La TVM es la pendiente de la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de la función.

Definición de derivada de una función en un punto

Definición

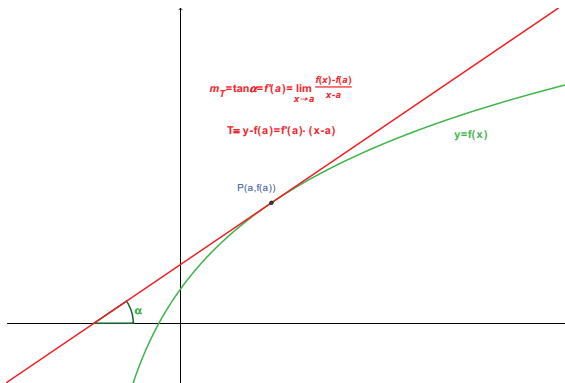
Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D_f$ la DERIVADA DE LA FUNCIÓN EN EL PUNTO $x = a$ es el **límite**, si existe, del cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente cuando ésta tiende a a .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Interpretación geométrica de la derivada

Interpretación

La derivada de una función en un punto, si existe, **es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.**



Derivadas laterales

Derivada lateral por la izquierda

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D_f$ la DERIVADA LATERAL POR LA IZQUIERDA EN EL PUNTO $x = a$ es el **límite**, si existe, del cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente cuando ésta tiende a a POR SU IZQUIERDA.

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h}$$

Derivada lateral por la derecha

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D_f$ la DERIVADA LATERAL POR LA DERECHA EN EL PUNTO $x = a$ es el **límite**, si existe, del cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente cuando ésta tiende a a POR SU DERECHA.

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Teorema 1

Si la función f es derivable en $x = a$ ENTONCES la función es continua en a .

$$f \text{ derivable} \implies f \text{ continua}$$

Consecuencias

- Si la función **NO es continua** en $a \in D_f$ entonces **NO es DERIVABLE** en a .
- La condición **NECESARIA, NO SUFICIENTE**, para que una función sea derivable en un punto es que sea CONTINUA.

Condición necesaria y suficiente

La condición **NECESARIA Y SUFICIENTE**, para que una función sea derivable en un punto es que sea continua, existan las derivadas laterales y sean iguales.

Teorema (Teorema 2)

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función . Si f es

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente} \\ \text{Estrictamente creciente} \\ \text{Decreciente} \\ \text{Estrictamente decreciente} \end{array} \right.$	en	

$x_0 \in D_f$ **y f es derivable en x_0** , entonces

$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{array} \right.$	

Teorema (Teorema 3)

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $x_0 \in D_f$. **Si**

$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{array} \right.$	entonces la función en x_0 es	$\left\{ \begin{array}{l} \text{estrictamente creciente} \\ \text{estrictamente decreciente} \end{array} \right.$
---	---------------------------------	---

Si **$f'(x_0) = 0$** **no se puede afirmar nada.** La función puede ser creciente, decreciente o no.

Definición (Máximo absoluto)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un **MÁXIMO ABSOLUTO** si $\forall x \in D_f$ se verifica $f(x) \leq f(a)$.

Definición (Mínimo absoluto)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un **MÍNIMO ABSOLUTO** si $\forall x \in D_f$ se verifica $f(x) \geq f(a)$.

Definición (Máximo relativo)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un máximo relativo (local) si $\exists E(a, r)$ tal que $\forall x \in E(a, r) \cap D_f$ se cumple que $f(a) \geq f(x)$.

Definición (Mínimo relativo)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un mínimo relativo (local) si $\exists E(a, r)$ tal que $\forall x \in E(a, r) \cap D_f$ se cumple que $f(a) \leq f(x)$.

NOTA

Todos los extremos absolutos son locales pero **NO todos los locales** son absolutos. Los extremos locales son **CANDIDATOS** a ser extremos absolutos.

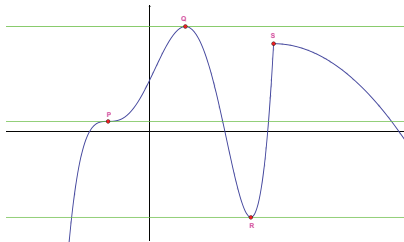
Teorema (Condición necesaria de punto crítico)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable en** $x_o \in D_f$, Si la función alcanza un extremo local en x_o entonces su derivada es nula, $f'(x_o) = 0$.

Interpretación del teorema

- Si la función es derivable en un punto y la derivada es cero, recta tangente paralela al eje de abscisas, dicho punto es **CANDIDATO** a extremo local.
- El recíproco del teorema, en general, NO ES CIERTO. La función $f(x) = x^3$ su derivada en 0 es $f'(0) = 0$ y la función no alcanza extremo local.

Ejemplo



- En el punto P la derivada es cero (tangente horizontal) y la función no alcanza extremo local.
- En el punto Q la derivada es cero (tangente horizontal) y la función alcanza extremo local (máximo relativo).
- En el punto R la derivada es cero (tangente horizontal) y la función alcanza extremo local (mínimo relativo).
- En el punto S la función NO es derivable y la función alcanza extremo local (máximo relativo).

Teorema (Condición suficiente de punto crítico. Criterio de la primera derivada)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

- ❶ f es continua en D_f y $f'(x_0) = 0$.
- ❷ f es derivable en un entorno del punto x_0 (por su izquierda y derecha).

entonces si $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0 - h) < 0 \text{ y } f'(x_0 + h) > 0 \\ f'(x_0 - h) > 0 \text{ y } f'(x_0 + h) < 0 \end{array} \right\}$ la función alcanza
en $x = x_0$ un $\left\{ \begin{array}{l} \text{MÍNIMO} \\ \text{MÁXIMO} \end{array} \right\}$ RELATIVO O LOCAL.

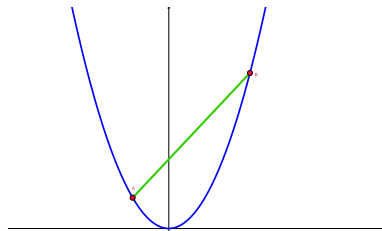
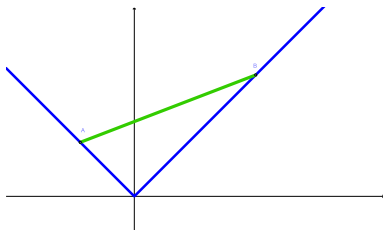
Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- ❶ Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- ❷ Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.
- ❸ **CANDIDATOS a EXTREMOS LOCALES (PUNTOS CRÍTICOS):**
 - Los ceros de la función derivada $f'(x) = 0$, condición necesaria si la función es derivable.
 - Los valores del dominio D_f que NO PERTENEZCAN al dominio de $D_{f'}$.
- ❹ Estudiar el **SIGNO DE LA PRIMERA DERIVADA** en los alrededores de los candidatos con $f'(x) = 0$ (monotonía de la función).
- ❺ RAZONAR si son extremos locales aplicando la condición suficiente del cambio de signo de la primera derivada.
- ❻ Si el punto NO es derivable, realizar un estudio local de la función en el punto (definición de extremo local).

Definiciones

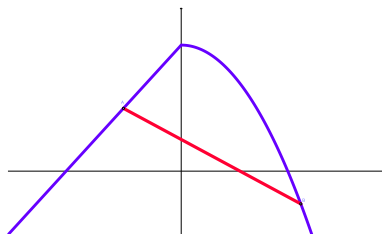
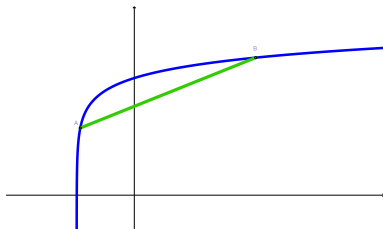
Definición (Cóncava $\cup$)

La función f es cóncava en el intervalo $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ todo punto del segmento AB , con $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por **encima** de la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$



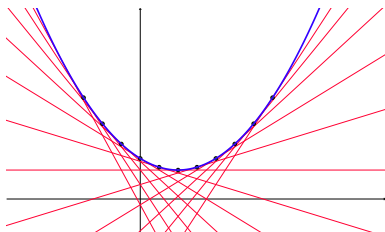
Definición (Convexa $\cap$)

La función f es convexa en el intervalo $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ todo punto del segmento AB , con $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por **debajo** de la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$

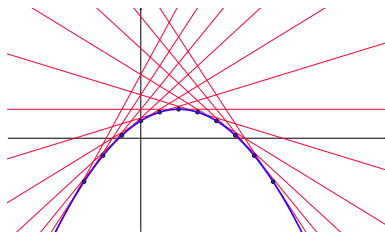


Consideremos que las funciones son, al menos, dos veces derivables.

Si la función es cóncava, $\cup$, entonces la gráfica de la función queda por **encima** de las tangentes.



Si la función es convexa, $\cap$, entonces la gráfica de la función queda por **debajo** de las tangentes.



Interpretación de las tangentes

- Si las pendientes de las tangentes, f' , es **creciente**, entonces la función es cóncava.
- Si las pendientes de las tangentes, f' , es **decreciente**, entonces la función es convexa.

Criterio de la segunda derivada

Sea f una función derivable, al menos, dos veces en el intervalo I

- Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$ entonces la función es cóncava.
- Si $f''(x) < 0, \forall x \in I$ entonces la función es convexa.
- Si $f''(x) = 0$ en algún punto de I , CASO DUDOSO, no decide el criterio de la segunda derivada.

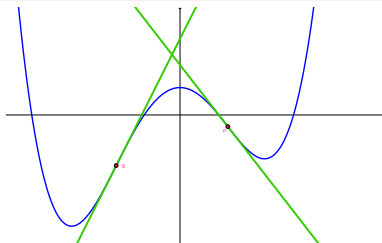
Definiciones

Definición (Punto de inflexión)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $x_0 \in D_f$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN** si la función cambia de curvatura, es decir, pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Definición (Tangentes)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $x_0 \in D_f$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN** si es derivable, $\exists f'$ y la tangente geométrica atraviesa la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$.



Teoremas

Teorema (Condición necesaria de punto de inflexión)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable, al menos, dos veces en** $x_0 \in D_f$, Si la función alcanza un punto de inflexión en x_0 entonces su segunda derivada es nula, $f''(x_0) = 0$.

Interpretación del teorema

- Si la función es, al menos, dos veces derivable en un punto y la segunda derivada es cero, dicho punto es **CANDIDATO** a punto de inflexión.
- El recíproco del teorema, en general, NO ES CIERTO. La función $f(x) = x^4$ su segunda derivada en 0 es $f''(0) = 0$ y la función no tiene punto de inflexión en $(0, 0)$.

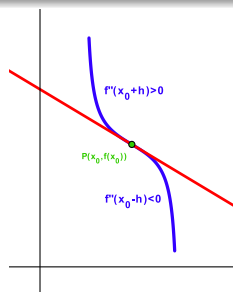
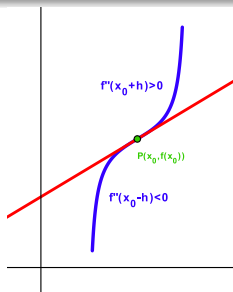
Teorema (Condición suficiente de punto de inflexión. Criterio de la segunda derivada)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

f derivable, al menos, dos veces en un entorno de x_0 y $f''(x_0) = 0$

entonces si $\left\{ \begin{array}{c} f''(x_0 - h) < 0 \text{ y } f''(x_0 + h) > 0 \\ \text{ } \\ f''(x_0 - h) > 0 \text{ y } f''(x_0 + h) < 0 \end{array} \right\}$ la función alcanza

en $x = x_0$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN**.



Teorema (Teorema de Weierstrass)

*Toda función **continua** definida en un **interval cerrado** $[a, b]$ alcanza extremos absolutos (máximo y mínimo).*

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces es cierto.
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** alcanzar extremos absolutos en el dominio de la función.
- Ejemplos (GEOGEBRA): [aquí](#)

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una **función continua** en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** tener CEROS.
- Interpretación gráfica:** si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo (a, b) , al menos, en un punto.
- Gráficamente (GEOGEBRA): aquí

Bolzano-inecuaciones

Sea f una función **CONTINUA**:

- Si f **NO TIENE CEROS** entonces $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.
- Entre dos ceros consecutivos, el signo de la función se mantiene.

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* , *derivable en (a, b)* y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, en el intervalo (a, b) un valor en el cual la primera derivada se anula.
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que la derivada se anule en algún punto intermedio.
- **Interpretación geométrica:** si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, al menos, en un punto del intervalo (a, b) la tangente a la gráfica de la función es paralela al eje de abscisas: $m_T = f'(c) = 0$.
- Gráficamente (GEOGEBRA): aquí

Corolario

Sea f una función derivable entonces *entre dos ceros consecutivos* de la función *existe, al menos, un cero de su función derivada*.

Demostración

Sean a y b los dos ceros consecutivos de la función f . Consideremos la función definida en el intervalo $[a, b]$. En dicho intervalo se verifican las hipótesis del teorema de Rolle: f es continua en el cerrado, derivable en el abierto y $f(a) = f(b) = 0$ por lo tanto $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, con lo cual el corolario queda demostrado.

- Si f' no posee raíces entonces la función f , como máximo, tendrá un cero.
- Si f' posee una raíz entonces la función f , como máximo, tendrá dos ceros.
- De la misma forma se puede razonar si tiene dos, tres, $\dots$, ceros la función derivada.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Sea f una función **continua en $[a, b]$** y **derivable en (a, b)** entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que se cumpla la tesis del teorema.
- **Interpretación geométrica:** si se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange, al menos, en un punto del intervalo (a, b) la tangente a la gráfica de la función es paralela a la secante que une los puntos de abscisa $x = a$ y $x = b$: $m_T = f'(c) = m_{\text{secante } AB}$.
- Gráficamente (GEOGEBRA): aquí

Teorema (Teorema de l'Hôpital)

Si f y g son dos funciones derivables en un entorno E de a , $f(a) = g(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0, g'(a) \neq 0$ en el entorno reducido E^* de a entonces $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

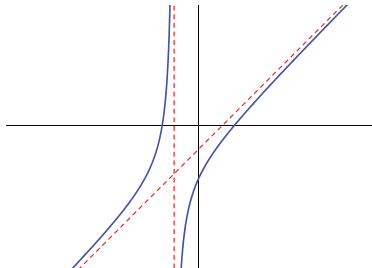
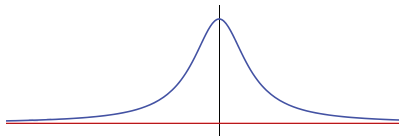
- El teorema de l'Hôpital se aplica para la indeterminación $\frac{0}{0}$ pero se puede aplicar para cualquier indeterminación siempre que se transforme en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
- El teorema se puede aplicar el número de veces que se quiera siempre que las funciones sean derivables.
- El teorema es útil para calcular límites pero no siempre su aplicación es la más rápida para el cálculo de límites.

Definición (Ramas de una función)

Una $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una RAMA INFINITA cuando x , $f(x)$ o ambas crecen infinitamente. El punto $P(x, f(x))$ se aleja infinitamente.

Definición (Asíntotas de una función)

Si las ramas se aproximan a unas rectas entonces dichas rectas reciben el nombre de asíntotas de la función. Son las rectas tangentes a la gráfica en el infinito. La palabra en griego significa que no coincide.



Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2 ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

3 ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas horizontales

Definición

La recta $y = b$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

ó

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

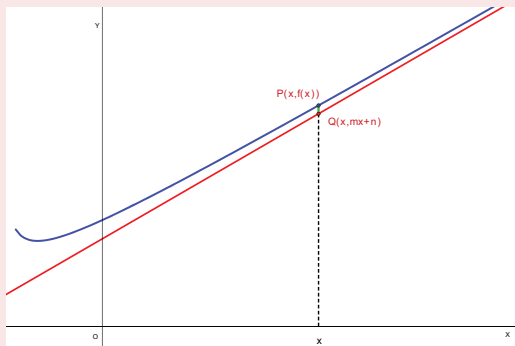
Si la función no posee asíntotas horizontales entonces puede tener asíntotas oblicuas.

Asíntota oblicua

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la función f si:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$

2 ó $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$



Cálculo de la pendiente m

Si la recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua se verifica la definición.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (mx + n)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{mx + n}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(m + \frac{n}{x} \right) = m$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Casos a estudiar

- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces la función puede tener asíntota oblicua.
- Si $m = 0$ entonces la función tiene RAMA PARABÓLICA EN LA DIRECCIÓN DEL EJE DE ABSCISAS (recta de pendiente cero).
- Si $m = \pm\infty$ entonces la función tiene RAMA PARABÓLICA EN LA DIRECCIÓN DEL EJE DE ordenadas (recta de "pendiente infinito").

Calculo de n si $m \neq 0$

Despejando n de la definición de asíntota oblicua:

$$n = \lim_{x \pm \infty} [f(x) - mx]$$

Casos a estudiar

- Si $n \in \mathbb{R}$ entonces la recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua.
- Si $n = \pm\infty$ entonces la función NO tiene asíntota oblicua. La función "se enrolla" alrededor de la recta $y = mx$.

Asíntotas verticales: En primer lugar hay que estudiar la continuidad de la función y clasificar los puntos de discontinuidad. Los puntos donde la función presente DISCONTINUIDAD ASINTÓTICA permite calcular las rectas que son asíntotas verticales de la función. Una función $f(x)$ puede tener **infinitas** asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: Si la variable independiente x puede tender a $-\infty$ o $+\infty$ la función puede tener asíntotas horizontales. El número **MÁXIMO** es de **DOS**, una cuando $x \rightarrow -\infty$ y otra si $x \rightarrow +\infty$.

Asíntotas oblicuas: Siempre en el caso que **no tenga asíntotas horizontales**, es decir $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, se calcula el valor de la posible pendiente m y se razona tal como está explicado.

Caso particular, funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

❶ **Asíntotas verticales:** Dominio de la función y continuidad.

❷ **Asíntotas horizontales y oblicua:**

Si $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Si $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = \frac{\text{coeficiente principal de } P(x)}{\text{coeficiente principal de } Q(x)}$ es asíntota horizontal.

Si $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x) + 1)$ entonces se efectúa la división entre los polinomios y la recta $y = \text{polinomio cociente}$ es la asíntota oblicua de la función.

Si $\text{grad}(P(x)) \geq \text{grad}(Q(x) + 2)$ entonces la función presenta ramas parabólicas en la dirección del eje de ordenadas.

Dominio de la función

Subconjunto $D_f \subseteq \mathbb{R}$ para los cuales la función está definida.

Simetrías

- 1 Si $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$ entonces la función f es **par**, su gráfica es simétrica respecto del **eje de ordenadas**
- 2 Si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D_f$ entonces la función f es **impar**, su gráfica es simétrica respecto del **origen de coordenadas**

Periodicidad

La función f es periódica si existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x+t) = f(x) \forall x \in D_f$.

Al menor de los valores t que verifican la definición se le llama período principal de la función y se denota por T .

La gráfica de la función se dibuja en el intervalo $[0, T)$ y se completa por periodicidad en todo su dominio D .

Cortes con los ejes de coordenadas

- 1 Con el eje de abscisas: son las soluciones del sistema formado por la función $y = f(x)$ y la ecuación del eje: $y = 0$.
- 2 Con el eje de ordenadas: son las soluciones del sistema formado por la función $y = f(x)$ y la ecuación del eje: $x = 0$. Con el eje de ordenadas como máximo hay un punto de corte: $(0, f(0))$.

Continuidad de la función

Estudio de la continuidad de la función, clasificando los puntos de discontinuidad.

Especial atención a los puntos x_0 en los cuales la función presenta una discontinuidad evitable.

Asíntotas y ramas parabólicas

- 1 Asíntotas verticales: $x = a$.
- 2 Asíntotas horizontales: $y = b$.
- 3 Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$
- 4 Ramas parabólicas en las direcciones de los ejes de coordenadas

Estudio de la primera derivada de la función

1 Puntos críticos: $\begin{cases} x_0 \in D_f \text{ y } x_0 \notin D_{f'} \\ x_0 \text{ tal que } f'(x_0) = 0 \end{cases}$

2 Estudio del signo de la primera derivada.

Resolver las inecuaciones: $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$

3 Determinar la monotonía y los extremos locales de la función.

Estudio de la segunda derivada de la función

1 Candidatos: $\begin{cases} x_0 \in D_f \text{ y } x_0 \notin D_{f''} \\ x_0 \text{ tal que } f''(x_0) = 0 \end{cases}$

2 Estudio del signo de la segunda derivada.

Resolver las inecuaciones: $\begin{cases} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}$

3 Determinar la curvatura y los puntos de inflexión de la función.

Primitiva

Definición (Primitiva de una función)

Sea f una función de dominio (a, b) , la función F de dominio (a, b) es

UNA primitiva de la función f **si** $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$.

- Existen funciones que NO tienen primitiva, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ y } f(x) = e^{x^2}$$

- El artículo indeterminado indica que es posible que exista más de una primitiva de una función.

Hallar, si existe, una primitiva de la función $f(x) = 2x$

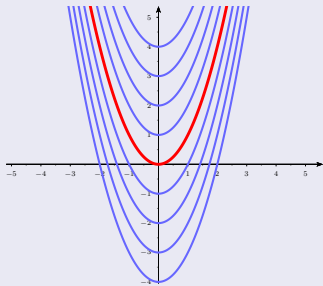
- Por definición de primitiva, hay que encontrar una función tal que su derivada sea igual a $2x$.
- Recordando la tabla de derivadas, **una** primitiva puede ser $F_1(x) = x^2$, pero también $F_2(x) = x^2 + 2$.
- En general $F(x) = x^2 + C, \forall C \in \mathbb{R}$.

Interpretación geométrica

La familia de parábolas

$$F(x) = x^2 + C, \forall C \in \mathbb{R}$$

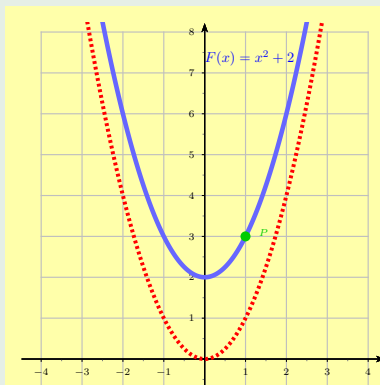
son primitivas de la función lineal $f(x) = 2x$.



De todas las primitivas de la función $f(x) = 2x$, hallar la que pase por el punto $P(1, 3)$

Todas las primitivas de $f(x)$ son $F(x) = x^2 + C$, si pasa por el punto P entonces:

$F(1) = 3 \implies 1^2 + C = 3 \implies 1 + C = 3 \implies C = 2$, la primitiva pedida es $F(x) = x^2 + 2$



Integral indefinida

Definición (Integral indefinida de una función)

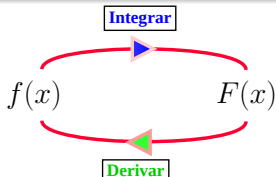
Sea f una función de dominio (a,b) al conjunto de **TODAS** las primitivas de la función recibe el nombre de **integral indefinida** de la función.

Notación

La notación empleada por Leibniz para la integral indefinida

(antiderivada) es:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$



La integral indefinida es lineal

Sean dos funciones f y g que tengan primitiva, F y G , respectivamente.

Teorema

La función suma, $f + g$, también tiene primitiva y su primitiva es igual a la suma de las primitivas, $F + G$.

$$\int (f + g)(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx = F(x) + G(x) + C$$

Demostración.

Para demostrar que $F(x) + G(x)$ es una primitiva de $(f + g)(x)$, hay que derivar:

$$(F(x) + G(x))' \stackrel{(1)}{=} F'(x) + G'(x) \stackrel{(2)}{=} f(x) + g(x)$$

(1) Derivada de una suma de funciones, suma de derivadas.

(2) Por definición de primitiva: $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ G'(x) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in D_f \cap D_g$

Teorema

La función $k \cdot f, \forall k \in \mathbb{R}$ también tiene primitiva y su primitiva es

$$k \cdot F, \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx = k \cdot F(x) + C$$

Demostración.

Para demostrar que $k \cdot F(x)$ es una primitiva de $k \cdot f(x)$, hay que derivar:

$$(k \cdot F(x))' \stackrel{(1)}{=} k \cdot F'(x) \stackrel{(2)}{=} k \cdot f(x)$$

- (1) Derivada de una constante por un función es igual a la constante por la derivada de la función.
- (2) Por definición de primitiva: $F'(x) = f(x), \forall x \in D_f$



Tabla de integrales

Función	Integral inmediata	Integral cuasiinmediata
$x^n \quad n \in \mathbb{R} \quad n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int [u(x)]^n \cdot u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x) + C$
a^x	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$
e^x	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) dx = e^{u(x)} + C$
$\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + C$
$\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x) dx = \tan u(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2} dx = \arctan u(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} dx = \arcsin u(x) + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$	$\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} dx = \arccos u(x) + C$

Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua:

- Int 1

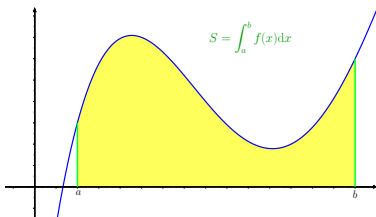
- Int 2

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_n L(f, P_n) = \lim_n U(f, P_n)$$

Los números a y b reciben el nombre, respectivamente, de límites de integración inferior y superior.

Interpretación geométrica de la integral definida

Si $\boxed{f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]}$ la $\int_a^b f(x)dx$ es por definición, el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función, las rectas $x = a$ y $x = b$ con el eje de abscisas.



Observación

La integral definida $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ (es UN NÚMERO REAL) negativo, positivo o cero.

Propiedades

Aditividad respecto del intervalo

Sea f una función integrable en $[a, b]$ y $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Nulidad

Si $a = b$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

ATENCIÓN:

Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ NO IMPLICA que $a = b$.

Anticonmutatividad

Sea f una función integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \boxed{\boxed{-}} \int_b^a f(x)dx$$

Linealidad de la integral definida

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces:

- $$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- $$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Valor absoluto

Sea f una función integrable en $[a, b]$, entonces:

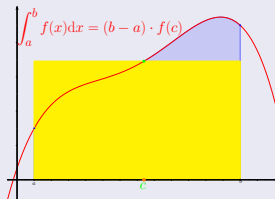
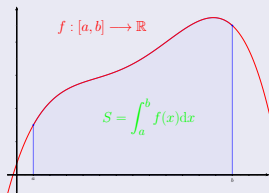
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Teorema (Teorema del valor medio para funciones continuas)

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio



Definición (Función integral)

Sea f una función continua en $[a, b]$. Se llama función integral de f , y se designa por F , a la función de:

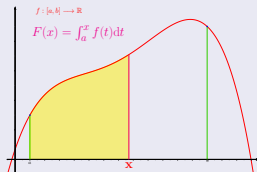
- dominio $[a, b]$

- $\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Interpretación geométrica de la función integral si $f(x) \geq 0$

La función integral F calcula el área del recinto limitado por:



Int-geo-fun

Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es

DERIVABLE en $[a, b]$ y **$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$**

Teorema (Regla de Barrow)

Si f es **CONTINUA** en $[a, b]$ y G es **UNA PRIMITIVA** de la función f , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Demostración.

Por el teorema fundamental del cálculo, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es UNA primitiva de la función f , $F'(x) = f(x)$. y la función $G(x)$, por hipótesis, también es una primitiva de la función f . Si dos funciones son primitivas de la misma función, se diferencian en una constante:

$\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{F(x) = G(x) + C} \forall x \in [a, b]$

$$\text{Si } x = a \implies F(a) = G(a) + C \implies \int_a^a f(t) dt = 0 = G(a) + C \implies C = -G(a)$$

$$\text{Si } x = b \implies F(b) = G(b) - G(a) \implies \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Teorema (Teorema de Barrow general)

Si f es una función acotada en $[a, b]$ y discontinua evitable en un número finito de puntos del intervalo y G es continua en $[a, b]$ y primitiva de f excepto en los puntos de discontinuidad de f , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[G(x) \right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Calcular las integrales definidas:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \int_2^6 \sqrt{x-2} dx &= \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^6 \stackrel{(Barrow)}{=} \\ &= \frac{2}{3} \left[(6-2)^{\frac{3}{2}} - (2-2)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

ATENCIÓN

- Si f es integrable pero no tiene primitivas entonces NO se puede aplicar la regla de Barrow.

La función $f(x) = e^{-x^2}$ es continua en todo su dominio y es integrable, pero no se puede aplicar la regla de Barrow.

- Si la función presenta discontinuidades asintóticas, no se puede aplicar la regla de Barrow.

No se puede aplicar la regla de Barrow para calcular la siguiente

integral: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$. ¿Por qué?

- Si el intervalo de integración NO está acotado, no se puede aplicar la regla de Barrow.

No se puede aplicar la regla de Barrow para calcular la siguiente

integral: $\int_0^{+\infty} x^2 dx$. ¿Por qué?

Cambio de variable en una integral definida

Si f es continua en $[a, b]$ y $x = g(t)$ es un cambio de variable tal que g y g' son funciones continuas y $\begin{cases} g(c) = a \\ g(d) = b \end{cases}$, entonces:

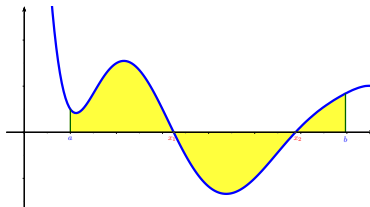
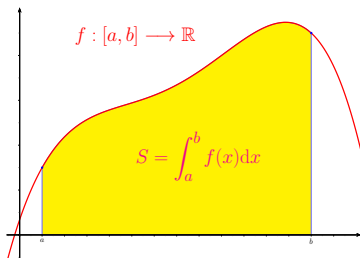
$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d (f \circ g)(t) \cdot g'(t) dt$$

Geogebra

Aplicando la interpretación geométrica de la integral definida:

- Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, entonces la $\int_a^b f(x)dx$ es el área (superficie) del trapecio mixtilíneo, limitado por el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- Si la región está por encima, ($f(x) > 0$) y por debajo del eje de abscisas ($f(x) < 0$), entonces:
 - Puntos de corte con el eje de abscisas que pertenezcan al intervalo $[a, b]$.

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx$$



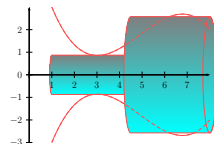
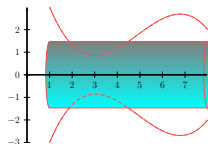
Superficie entre dos funciones

La superficie limitada por las gráficas de las funciones continuas f y g tal que $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, viene expresada por:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

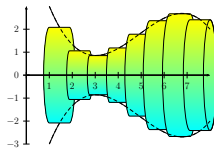
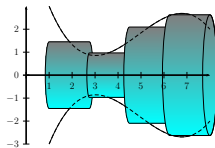
Geogebra

Volumen de un cuerpo de revolución



Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
Partición del intervalo $[a, b]$:

- $n = 1$ y $n = 2$
- $n = 4$ y $n = 8$
- $n = 16$ y $n = 32$



$$V_{OX} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

