

Matris

- 1 Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculeu:

- (a) $A - B + C$ (b) $A - (B - C)$ (c) $C - (A - B)$ (d) $3A - 2C$

- 2 Determineu una matriu X que verifiqui que $A + X = B$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- 3 Considereu les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculeu, si és possible, els productes següents:

- (a) $A \cdot B$ (b) $B \cdot A$ (c) $A \cdot C$ (d) $B \cdot C$ (e) $3A \cdot 2B$

- 4 Amb les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comproveu que es compleixen les propietats següents:

- (a) $(A^t)^t = A$ (b) $(A + B)^t = A^t + B^t$ (c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

- 5 Determineu quines de les següents matrius són simètriques o antisimètriques (raonant la resposta) i efectueu els càlculs que s'indiquen, si és possible:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) $A^t \cdot C$ (b) $C \cdot D^t$ (c) $(B + E)^t$ (d) $D \cdot D^t$ (e) $A^t \cdot C^t$ (f) $(3E)^t$

- 6 Raona les següents preguntes:

- (a) Existeix sempre el producte $A^t \cdot A$, en què A és una matriu qualsevol?
(b) El producte de dues matrius simètriques de la mateixa dimensió, també és una matriu simètrica?

- 7 Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Comproveu si la identitat notable $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ es compleix per a aquestes matrius.

- 8 Donades les matrius $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calculeu $M \cdot N$ i expliqueu què observeu en el resultat final.

- 9 Sigui A matriu de dimensió 2x2, B matriu de dimensió 3x2, C matriu de dimensió 2x3, D matriu de dimensió 2x1 i E matriu de dimensió 1x2. Diguen tots els productes d'aquestes matrius que es puguin efectuar i la dimensió de la matriu producte resultant.

- 10 Considereu les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determineu la dimensió de la matriu M perquè el producte AMB es pugui efectuar.

(b) Determineu la dimensió de la matriu N perquè $B^t N$ es pugui efectuar.

11 Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calculeu M^2 , M^3 i M^{128} .

12 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$:

(a) Comproveu que $A^2 = 2A - I$, on I és la matriu identitat d'ordre 3.

(b) Utilitzeu aquesta igualtat per calcular A^4 .

13 Determineu a i b de forma que la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifiqui $A^2 = A$ i calculeu A^n .

14 Calculeu A^n i B^n on $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15 Calculeu el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

16 Trobeu el valor del paràmetre a de les matrius següents, de manera que el seu rang sigui 2:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & a & 7 \end{pmatrix}$$

17 Trobeu el valor de k , si existeix, perquè el rang de la matriu $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 5 & k & -10 \\ 1 & 1/3 & -2 \end{pmatrix}$ sigui 1.

18 Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre k :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

19 Una matriu quadrada d'ordre 3 té rang 2.

(a) Quin és el rang de la matriu que en resulta quan traiem una fila?

(b) Quin és el rang de la matriu que en resulta quan eliminen una columna?

(c) Què passaria en els casos anteriors si el rang de la matriu inicial fos 3?

20 Un fabricant elabora dos tipus de productes, X i Y , que ven a tres empreses, A , B i C . Al principi distribuïa 1.000 unitats de cada producte a cadascuna, però aquest mes l'empresa A va rebre 600 unitats de X i 300 de Y , l'empresa B va rebre 400 unitats de X i 800 de Y , i l'empresa C va rebre 900 unitats de X i 700 unitats de Y . Representa mitjançant una matriu les disminucions percentuals que s'han produït en la distribució dels productes a aquestes empreses.

- 21 Una empresa de transports té tres models de camions diferents, P , Q i R , en els quals hi cap un cert nombre de contenidors de tres tipus, A , B i C , d'acord amb la taula següent:

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ P \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ Q \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ R \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si P , Q i R han realitzat 5, 4 i 3 viatges respectivament, quants contenidors de cada tipus s'han transportat?

- 22 Tres famílies van a una gelateria. La primera demana dos gelats grans, tres de mitjans i un de petit; la segona en demana un de gran, tres de mitjans i tres de petits i la tercera família en demanda tres de grans i tres de petits.

- (a) Escriviu una matriu que indiqui el nombre de gelats de cada tipus que demana cada família.
(b) Si els preus dels gelats són 2,75 € el gran, 2€ el mitjà i 1,5 € el petit, calcula quant s'han gastat cada família utilitzant un producte de matrius.

- 23 Una fàbrica decideix distribuir els seus excedents de tres productes alimentaris, A , B i C , a quatre països de l'Àfrica, P_1 , P_2 , P_3 i P_4 , segons es descriu en la matriu M_1 , on les quantitats es troben expressades en tones. Aquesta fàbrica ha rebut pressupostos de dues empreses per al transport dels productes als països de destí com indica la matriu M_2 , on les quantitats expressen euros per tona.

$$M_1 = \begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ P_1 \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \end{pmatrix} \\ P_2 \begin{pmatrix} 110 & 130 & 200 \end{pmatrix} \\ P_3 \begin{pmatrix} 220 & 200 & 100 \end{pmatrix} \\ P_4 \begin{pmatrix} 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array} \quad M_2 = \begin{array}{c} P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \\ E_1 \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \end{pmatrix} \\ E_2 \begin{pmatrix} 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectueu el producte de les matrius, $M_2 \cdot M_1$, i responeu:

- (a) Què representa l'element a_{11} de la matriu producte?
(b) Quin element de la matriu producte ens indica el que costa transportar el producte C amb l'empresa E_2 ?
(c) Indiqueu quins elements de la matriu producte ens permeten decidir quina és l'empresa que transporta a més baix preu el producte B a tots els països.

- 24 La Carme treballa com a telefonista en una empresa de dilluns a divendres, entre les nou del matí i les dues de la tarda. A més, es fa càrrec d'un nadó de quatre a set de la tarda els dilluns, dimecres i divendres, i arxiva documents en una bufet d'advocats els dimarts i els dijous de cinc a nou.

- (a) Escriviu la matriu que expressa el nombre d'hores que dedica a cada una de les activitats al llarg dels dies de la setmana.
(b) Si li paguen 10€ per hora com a telefonista, 8 € per hora per tenir cura del nadó i 12 € per hora per arxivar documents, expresseu matricialment els ingressos diaris de la Carme.
(c) Si deixés de fer-se càrrec del nadó els dilluns i d'anar al bufet d'advocats els dijous, i li apugessin el sou de telefonista un cinc per cent, com serien les matrius anteriors?

- 25 Trobeu l'expressió general de totes les matrius que commuten amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 26 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, trobeu una matriu B que commuti amb la matriu A , que sigui triangular superior i en què la suma dels elements de la diagonal principal sigui 2.

- 27 Determineu totes les matrius A d'ordre 2 antisimètriques que verifiquin la condició $A^4 = 16 \cdot I$.

- 28 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu les matrius B tals que $A \cdot B = B \cdot A^t$.

- [29] Trobeu totes les matrius M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que compleixen l'equació $M^2 - 2M = 3I$, on I és la matriu identitat.
- [30] D'una matriu A sabem que verifica la condició $A^2 = 2A - I$, on I és la matriu identitat. Determineu l'expressió general de la potència n -èsima de la matriu A .

Solucions

- [1] (a) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C - (A - B) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
 (b) $A - (B - C) = A - B + C$ (d) $3A - 2C = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 2 & -11 & 3 \end{pmatrix}$
- [2] $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- [3] (a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -20 \end{pmatrix}$ (c) No és possible (e) $3A \cdot 2B = 6 \cdot A \cdot B$
 (b) No és possible (d) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
- [4]
- [5] Simètriques: A i B; Antisimètriques: C
- (a) $A^T \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 1 & 10 & -17 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ (c) $(B + E)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $A^T \cdot C^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -1 & -10 & 17 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
 (b) No és possible (d) $D \cdot D^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $(3E)^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
- [6] [7] [8] $M \cdot N = 5 \cdot M$
- [9] $A \cdot C(2x3), A \cdot D(2x1), B \cdot A(3x2), B \cdot C(3x3), B \cdot D(3x1), C \cdot B(2x2), D \cdot E(2x2), E \cdot A(1x2), E \cdot C(1x3), E \cdot D(1x1)$
- [10] (a) M matriu quadrada de dimensió 3.
 (b) N matriu de dimensió $3 \times n$ on n un nombre natural
- [11] $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, M^3 = I$ i $M^{128} = M^2$
- [12] (a) (b) $A^4 = 4A - 3I$
- [13] $a = 2$ i $b = -1$; amb aquests valors $A^n = A$
- [14] $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- [15] (a) 1 (b) 1 (c) 2 (d) 1 (e) 1 (f) 3 (g) 2 (h) 3 (i) 4
- [16] (a) Si $a = 5$, el rang $M=2$; si $a \neq 5$ el rang $M=3$. (b) Si $a = 2$, el rang $N=2$; si $a \neq 2$ el rang $N=3$.
- [17] No existeix cap valor de k pel qual el rang d'aquesta matriu val 1.
- [18]

- (a) El rang $M=3$ per a tot valor de k real. (c) Si $k = -2$, el rang $P=1$; si $a \neq -2$ el rang $P=2$.
 (b) Si $k = -\frac{1}{2}$, el rang $N=2$; si $k \neq -\frac{1}{2}$ el rang $N=3$. (d) Si $k = 2$, el rang $Q=2$; si $k \neq 2$ el rang $Q=3$.

[19] (a) Rang 1 o 2 (b) Rang 1 o 2 (c) Rang 2

[20]
$$\begin{matrix} & A & B & C \\ x & \begin{pmatrix} -0,40 & -0,60 & -0,10 \end{pmatrix} \\ y & \begin{pmatrix} -0,70 & -0,20 & -0,30 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

[21] 45 del tipus A , 44 del tipus B i 58 del tipus C .

[22] (a)
$$\begin{matrix} & G & M & P \\ F_1 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ F_2 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ F_3 & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- (b) La primera família 13 €, la segona 13,25 € i la tercera 12,75€.

[23] (a) Representa el que costa transportar als quatre països el producte A amb l'empresa E_1 .

(b) a_{23} .

(c) a_{12} i a_{22} .

[24] (a)
$$\begin{matrix} & dl & dm & dc & dj & dv \\ T & \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ M & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(b)
$$\begin{matrix} & dl & dm & dc & dj & dv \\ (74 & 98 & 74 & 98 & 74) \end{matrix}$$

(c)
$$\begin{matrix} & dl & dm & dc & dj & dv \\ T & \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ M & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ i } \begin{matrix} dl & dm & dc & dj & dv \\ (52,5 & 100,5 & 76,5 & 52,5 & 76,5) \end{matrix}$$

[25]
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

[26] $B = I$

[27] $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

[28] $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$

[29] $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

[30] $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I$