

① Sea la función $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}}$:

(a) Hallar su dominio máximo.

La función se lee: *exponencial del cociente entre la raíz cuadrada de un polinomio y un polinomio*.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 \geq 0 \wedge x + 3 \neq 0\}$$

La solución de la inecuación $x^2 - 1 \geq 0$ es $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. La raíz del polinomio del denominador es $x = -3$.

$$D_f = \left\{ (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \right\} \setminus \{-3\}$$

(b) Hallar, si existe, su asíntota vertical.

La función es composición de funciones continuas, en su dominio la función es continua.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-3 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{(-3-h)^2-1}}{-3-h+3}} = e^{\frac{\sqrt{8}}{-0}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-3 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{(-3+h)^2-1}}{-3+h+3}} = e^{\frac{\sqrt{8}}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty \end{aligned}$$

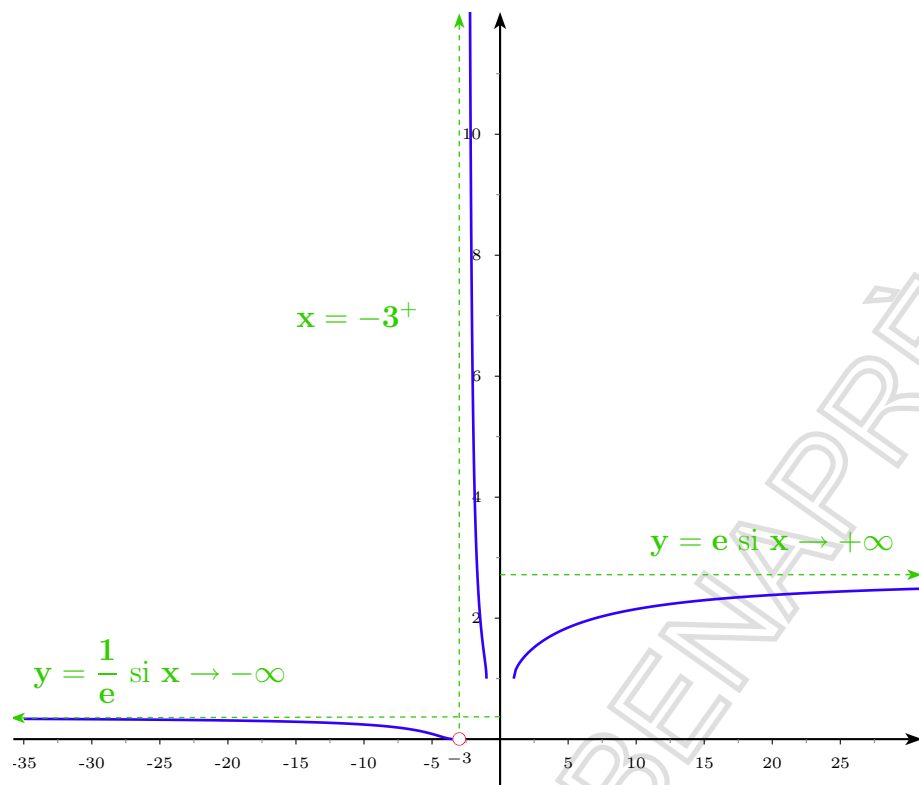
La recta $x = -3$ es A.V. cuando $x \rightarrow -3^+$

(c) Demostrar que las rectas $y = e$ e $y = \frac{1}{e}$ son sus asíntotas horizontales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}} = e^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3} = e^1 = e \implies y = e \text{ si } x \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}} = e^{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3} \stackrel{x=-t}{=} e^{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{-t+3} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

La recta $y = \frac{1}{e}$ si $x \rightarrow -\infty$

La gráfica de la función $f(x)$ efectuada con el programa GEOGEBRA es:



② Resolver las ecuaciones:

(a) $3^{1-x} = \frac{1}{243}$. Descomponiendo factorialmente: $243 = 3^5$

$$3^{1-x} = \frac{1}{3^5} \Rightarrow 3^{1-x} = 3^{-5} \Leftrightarrow 1-x = -5 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

(b) $(0, 25)^{-x^2+2} = 4 \cdot 2^{-x}$. Descomponiendo factorialmente: $0, 25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ y $4 = 2^2$.

$$2^{(-2) \cdot (-x^2+2)} = 2^{2+(-x)} \xrightarrow{(1)} -2(-x^2+2) = 2-x \Rightarrow 2x^2+x-6=0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

————— **Razonamientos** —————

(1) La función exponencial de base dos es INYECTIVA.

(c) $25^{x^2+x} = (0.2)^{3x+3}$. Descomponiendo factorialmente: $25 = 5^2$ y $0.2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$

$$5^{2 \cdot (x^2+x)} = 5^{-(3x+3)} \xrightarrow{(1)} 2x^2+2x = -3x-3 \Rightarrow 2x^2+5x+3=0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4} = \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

————— **Razonamientos** —————

(1) La función exponencial de base cinco es INYECTIVA.

(d) $2^{\sqrt{2x+8}} = 4^{\sqrt{x-3}+1}$. Descomponiendo: $4 = 2^2$

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{2x+8}} &= 2^{2(\sqrt{x-3}+1)} \xrightarrow{(1)} \sqrt{2x+8} = 2(\sqrt{x-3}+1) \xrightarrow{(2)} 2x+8 = 4(x-3+2\sqrt{x-3}+1) \xrightarrow{(3)} \\ x+4 &= 2x-4+4\sqrt{x-3} \xrightarrow{(4)} 4\sqrt{x-3} = 8-x \xrightarrow{(2)} 16(x-3) = x^2-16x+64 \Rightarrow \\ x^2-32x+112 &= 0 \xrightarrow{(5)} x = 16 \pm \sqrt{256-112} = 16 \pm 12 = \begin{cases} x = 28 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Discusión de las soluciones:

- Si $x = 28$ entonces sustituyendo en la ecuación irracional: $\begin{cases} \sqrt{64} = 8 \\ 2(\sqrt{25}+1) = 2(5+1) = 12 \end{cases}$
 $\boxed{x = 28}$ **NO** es solución de la ecuación irracional y tampoco de la ecuación exponencial.
- Si $x = 4$ entonces $\sqrt{16} = 2(\sqrt{1}+1) \Rightarrow 4 = 4$. $\boxed{x = 4}$ es la solución de la ecuación exponencial.

Razonamientos

- (1) La función exponencial de base dos es INYECTIVA.
- (2) Ecuación irracional, elevando al índice de la raíz aislada.
- (3) Simplificando por dos.
- (4) Aislado la raíz.
- (5) Forma reducida de resolver una ecuación de segundo grado.