

① Resolver las ecuaciones:

(a) $0,25 \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 = 0,125$

$$0,25 \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 = 0,125 \xRightarrow{(1)} \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{-2} \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 = 2^{-3} \xRightarrow{(2)}$$

$$2^{-2+x^2-2x-4} = 2^{-3} \xLeftrightarrow{(3)} x^2 - 2x - 6 = -3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Razonamientos

(1) $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ y $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

(2) Producto de potencias de la misma base.

(3) Las funciones exponenciales son inyectivas.

(b) $4^x - 3 = 1 + 3 \cdot 2^{x-4}$

$$4^x - 3 = 1 + 3 \cdot 2^{x-4} \Rightarrow 2^{2(x-3)} = 1 + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-4} \Rightarrow 2^{2x} \cdot 2^{-6} = 1 + 3 \cdot \frac{2^x}{16}$$

$$\frac{2^{2x}}{64} = 1 + 3 \cdot \frac{2^x}{16} \xRightarrow{(1)} t^2 = 64 + 12t \Rightarrow t^2 - 12t - 64 = 0$$

$$t = 6 \pm \sqrt{36 + 64} = 6 \pm 10 = \begin{cases} t_1 = 16 \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases} \text{Si } t = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow \boxed{x = 4} \\ \text{Si } t = -4 \Rightarrow 2^x = -4 \text{ No hay solución real: } a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Razonamientos

(1) **CAMBIO DE VARIABLE** $\boxed{2^x = t}$. M.C.M. (16, 64) = 64.

(c) $25^{\sqrt{x+3}} = 5 \cdot 5^{\sqrt{x+3}}$

$$25^{\sqrt{x+3}} = 5 \cdot 5^{\sqrt{x+3}} \xRightarrow{(1)} 5^{2 \cdot \sqrt{x+3}} = 5^{1+\sqrt{x+3}} \xRightarrow{(2)} 2\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} = 1 \xRightarrow{(3)} x+3 = 1 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

Razonamientos

(1) $25 = 5^2$ y producto de potencias de la misma base.

(2) Las funciones exponenciales son inyectivas.

(3) Ecuación irracional: se elevan los dos miembros de la ecuación al índice del radical (en este caso dos).

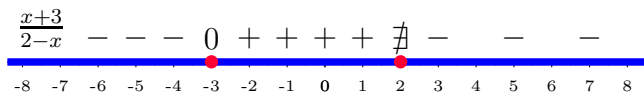
② Hallar el dominio máximo de la función $f(x) = \log_2 \left(\frac{x+3}{2-x} \right)$

Logaritmo base dos DEL cociente de dos funciones polinómicas.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+3}{2-x} > 0 \wedge 2-x \neq 0 \right\}$$

Los ceros de las funciones del numerador y del denominador: $\begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

Solución de la inecuación $\frac{x+3}{2-x} > 0$.



$$D_f = (-3, 2)$$

③ Calcular: $\log_3 81 + \log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_7 \sqrt[3]{49}$

$$\begin{cases} \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \\ \log_{\frac{1}{5}} 25 = \log_{\frac{1}{5}} 5^2 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = -2 \\ \log_7 \sqrt[3]{49} = \log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \end{cases} \implies \log_3 81 + \log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_7 \sqrt[3]{49} = 4 - 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$