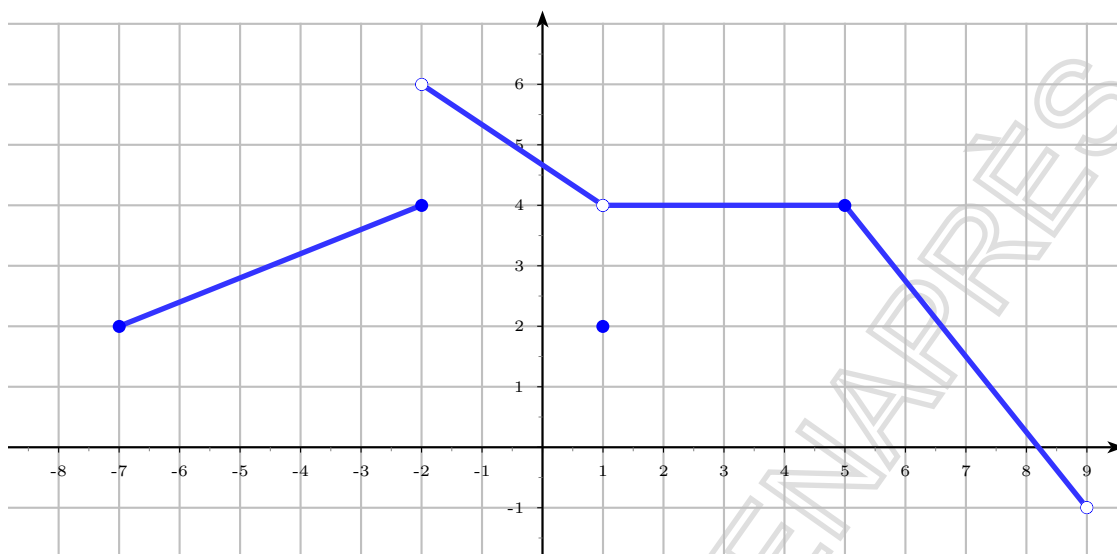


① Sea la función $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica es:



(a) Hallar el dominio y el recorrido de la función.

$$\bullet D_f = [-7, 9)$$

$$\bullet \text{Im}f = (-1, 6)$$

(b) ¿Es continua la función?

La función es continua $\forall x \in D_f \setminus \{-2, 1\}$. En $x = -2$ la discontinuidad es de salto finito y en $x = 1$ es evitable.

(c) Calcular, geométicamente, $f'(x)$.

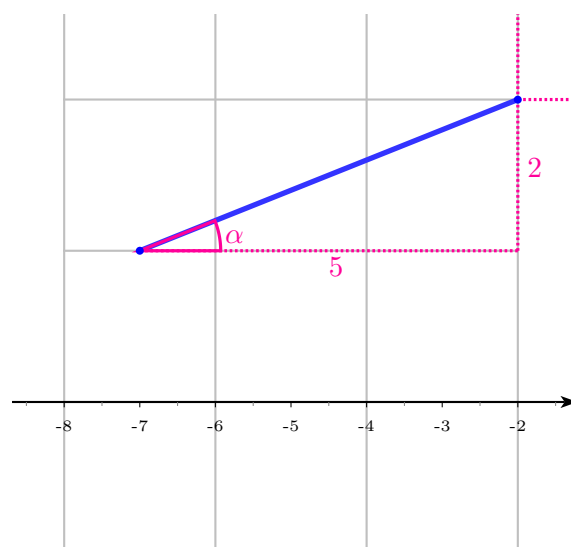
La derivada de una función en un punto, si existe, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto

$$f'(a) = m_{\text{tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x \in (-7, -2)$$

La pendiente de la tangente corresponde con la pendiente de la recta: $m = \tan \alpha = \frac{2}{5}$

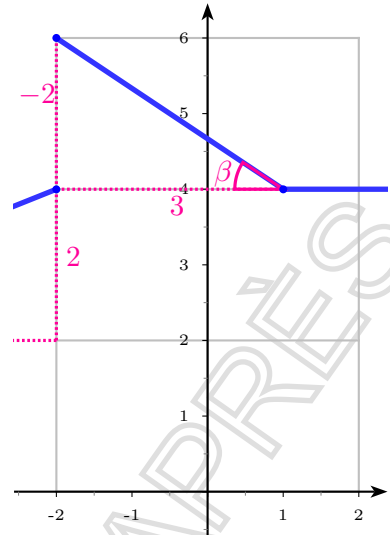
$\forall x \in (-7, -2)$ la derivada es igual a: $f'(x) = \frac{2}{5}$



$$x \in (-2, 1)$$

La pendiente de la tangente corresponde con la pendiente de la recta: $m = \tan(\pi - \beta) = -\frac{2}{3}$

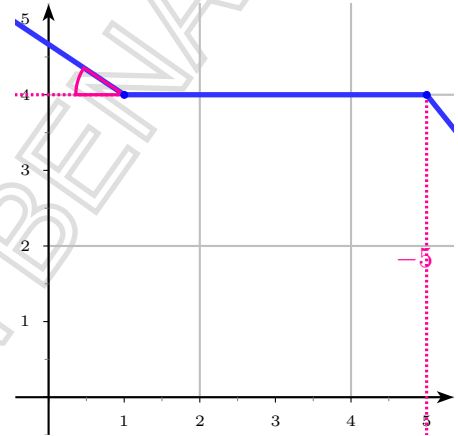
$\forall x \in (-2, 1)$ la derivada es igual a: $f'(x) = -\frac{2}{3}$



$$x \in (1, 5)$$

La pendiente de la tangente corresponde con la pendiente de la recta: $m = 0$

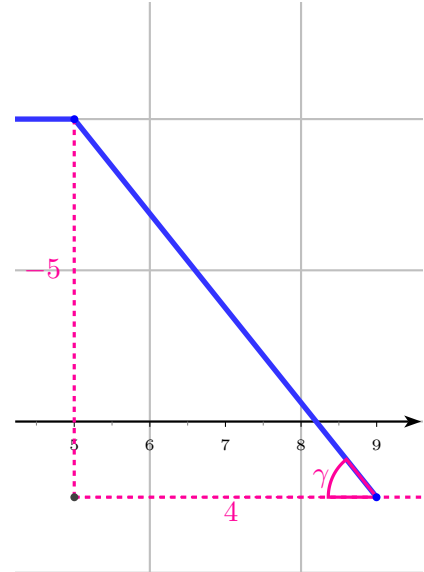
$\forall x \in (1, 5)$ la derivada es igual a: $f'(x) = 0$



$$x \in (5, 9)$$

La pendiente de la tangente corresponde con la pendiente de la recta: $m = \tan(\pi - \gamma) = -\frac{5}{4}$

$\forall x \in (5, 9)$ la derivada es igual a: $f'(x) = -\frac{5}{4}$



(d) ¿En qué puntos la función NO es derivable? La función NO es derivable en los puntos:

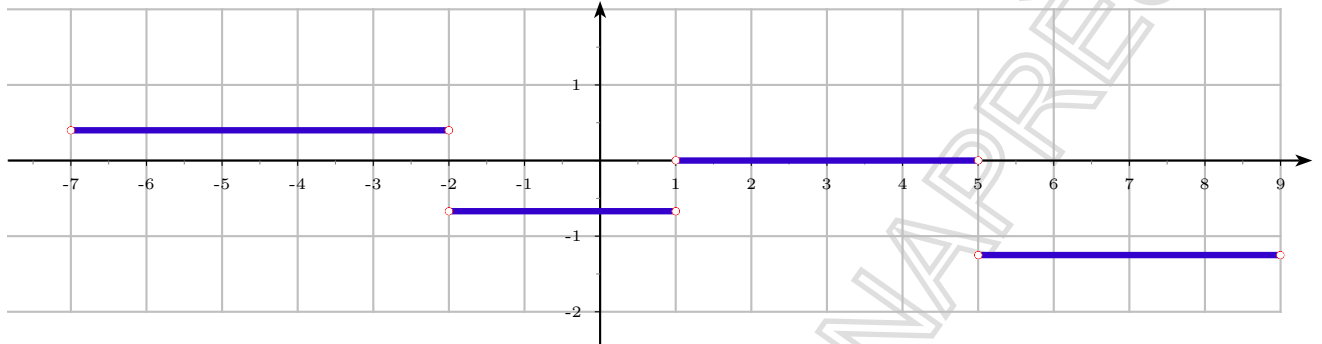
- Donde es discontinua: $x = -2$ y $x = 1$.
- En $x = -7$ sólo hay función por la derecha y no es derivable.
- En $x = 5$ la función es continua pero NO es derivable, **existen las derivadas laterales pero**

son distintas:

$$\begin{cases} f'(5^-) = 0 \\ f'(5^+) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

(e) Dibuja, razonadamente, la gráfica de la función $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{si } -7 < x < -2 \\ -\frac{2}{3} & \text{si } -2 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 5 \\ -\frac{5}{4} & \text{si } 5 < x < 9 \end{cases}$$



② Sea la función $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$:

(a) Aplicando la definición de derivada, calcular: $f'(2)$.

El dominio máximo: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la función es continua en su dominio y $f(2) = 4$. Definición de derivada:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h+2}{2+h-1} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h - (4(h+1))}{h(h+1)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h-4h-4}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h(h+1)} = -3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(2) = -3}$$

(b) Hallar la ecuación de la tangente y de la normal en el punto de abscisa $x = 2$.

- Haz de rectas de vértice el punto $P(2, 4)$:

$$y - 4 = m(x - 2)$$

Interpretación geométrica de la derivada:

$$\boxed{m_T = f'(2) = -3}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 4 = -3(x - 2) \implies 3x + y - 10 = 0$$

- La normal es perpendicular a la tangente,

$$m_N \cdot m_T = -1 \implies m_N = \frac{1}{3}$$

Ecuación de la normal:

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 2) \implies x - 3y + 10 = 0$$

(c) ¿En qué punto la función NO es derivable? Razonar la respuesta.

La función no está definida en $x = 1$, no es derivable.

