

① Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^3 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudiar si la función es derivable en $x = -1$ y $x = 0$. En caso afirmativo, hallar $f'(-1)$ y $f'(0)$.

- $x = -1$. La función está definida en $x = -1$ y $f(-1) = 1$

Continuidad: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-1 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} (2(-1 - h) + 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} ((-1 + h)^2 + 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$

La función NO es continua $x = -1$ y NO es derivable.

- $x = 0$. La función está definida en $x = 0$ y $f(0) = 1$

Continuidad: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} ((0 - h)^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} ((0 + h)^3 + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1.$

La función es continua en $x = 0$.

Derivadas laterales:

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 - h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 - h)^2 + 1 - 1}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{-h} = 0 \\ f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 + h)^3 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\exists f'(0) = 0}$$

② Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 3}$ en el punto $x = 1$.

Dominio de la función $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$. La función es derivable en todo su dominio (cociente de funciones derivables).

- Punto de tangencia: $P(1, f(1)) \Rightarrow P(1, 1)$.
- Función derivada:

$$f'(x) \stackrel{(1)}{=} \frac{(2x - 3)(2x - 3) - (x^2 - 3x + 1) \cdot 2}{(2x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x + 9 - 2x^2 + 6x - 2}{(2x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x + 7}{(2x - 3)^2}$$

- Interpretación geométrica de la derivada:

$$m_{\text{tangente}} = f'(x = 1) = \frac{2 - 6 + 7}{1^2} = 3$$

- Ecuación de la recta tangente (haz de rectas):

$$T \equiv y - 1 = f'(x = 1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow \boxed{T \equiv 3x - y - 2 = 0}$$

Razonamientos

(1) Derivada de un cociente de funciones.

③ Calcular las derivadas de las funciones y simplificar:

(a) $f(x) = \frac{x + \ln x}{x + 5}$

$$f'(x) \stackrel{(1)}{=} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x + 5) - (x + \ln x) \cdot 1}{(x + 5)^2} = \frac{\cancel{x} + 1 + 5 + \frac{5}{\cancel{x}} - \cancel{x} - \ln x}{(x + 5)^2} = \frac{6x - x \ln x + 5}{x(x + 5)^2}$$

(b) $f(x) = \sqrt[5]{x} + 3x\sqrt[4]{x} - \pi \implies f(x) = x^{\frac{1}{5}} + 3x \cdot x^{\frac{1}{4}} - \pi = x^{\frac{1}{5}} + 3 \cdot x^{\frac{5}{4}} - \pi$

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} + 3 \cdot \frac{5}{4} \cdot x^{\frac{5}{4}-1} + 0 = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{15}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}}$$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) + \frac{2x}{x + 1}$

$$\boxed{f'(x)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2)^2} + 2 \cdot \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{(x + 1)^2} = \frac{2x(\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1)}{\cancel{x^2}(x^2 - 1)} + \frac{2}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2}{x(x^2 - 1)} + \frac{2}{(x + 1)^2} \stackrel{(2)}{=} 2 \cdot \frac{x + 1 + x(x - 1)}{x(x + 1)^2(x - 1)} = \boxed{\frac{2(x^2 + 1)}{x(x + 1)^2(x - 1)}}$$

Razonamientos

(1) Derivada de una suma de funciones:

- Derivada de la función logaritmo neperiano **DE** un cociente (regla de la cadena).
- Derivada de un cociente de funciones.

(2) Mínimo común múltiplo de los denominadores: $x(x + 1)^2(x - 1)$