

① Efectúa y simplifica:

$$a) \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right) \cdot (3 + 2\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) &\stackrel{(1)}{=} \left(\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})}{(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})} \right) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = \left(\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} \right) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{6 - 2\sqrt{18} + 3}{6 - 3} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \stackrel{(3)}{=} \frac{\cancel{3} (3 - 2\sqrt{2})}{\cancel{3}} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \stackrel{(4)}{=} 9 - (2\sqrt{2})^2 = \\ &= 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 1$$

Razonamientos

(1) Racionalizar.

(2) Identidades notables.

(3) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

(4) Suma por su diferencia.

$$b) \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5} &\stackrel{(1)}{=} \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5} \stackrel{(2)}{=} \frac{(6 + 2\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1)} - 3\sqrt{5} \stackrel{(3)}{=} \frac{6\sqrt{5} + 6 + 10 + 2\sqrt{5}}{5 - 1} - 3\sqrt{5} \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{16 + 8\sqrt{5}}{4} - 3\sqrt{5} = \frac{\cancel{4} (4 + 2\sqrt{5})}{\cancel{4}} - 3\sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \stackrel{(4)}{=} 4 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5} = 4 - \sqrt{5}$$

Razonamientos

(1) Identidad notable.

(2) Racionalizar el denominador.

(3) Propiedad distributiva e identidad notable.

(4) Suma de radicales semejantes.

② Resolver las inecuaciones:

$$a) \quad 3x^2 - 4x - \frac{3x(x-2)}{2} \leq 14 - 5(x^2 - 2)$$

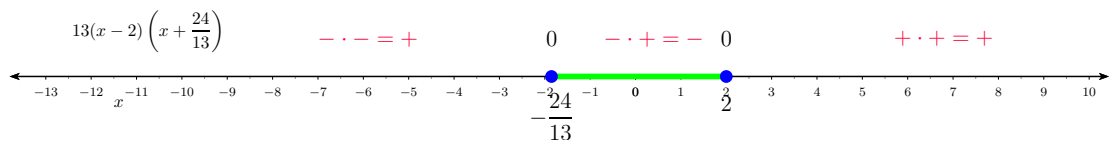
$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x - \frac{3x(x-2)}{2} &\leq 14 - 5(x^2 - 2) \quad \text{m.c.m.}(1, 2) = 2 \\ 6x^2 - 8x - 3x(x-2) &\leq 28 - 10(x^2 - 2) \implies 6x^2 - 8x - 3x^2 + 6x \leq 28 - 10x^2 + 20 \\ 13x^2 - 2x - 48 &\leq 0 \end{aligned}$$

Inecuación de segundo grado con una incógnita.

- Raíces reales de la ecuación de segundo grado $13x^2 - 2x - 48 = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 48 \cdot 13}}{26} = \frac{2 \pm \sqrt{2500}}{26} = \frac{2 \pm 50}{26} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{24}{13} \end{cases}$$

- Descomposición en factores: $13(x-2) \cdot \left(x + \frac{24}{13}\right) \leq 0$ y estudio del signo.



Solución de la inecuación: $x \in \left[-\frac{24}{13}, 2\right]$

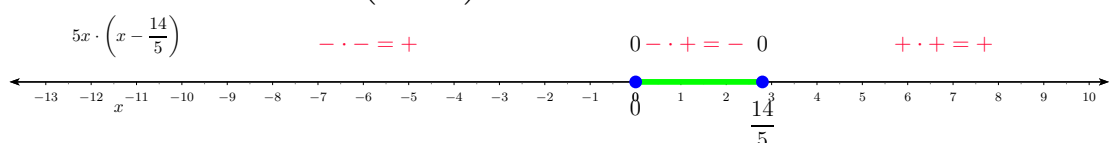
$$b) \quad \frac{(2x-3)^2}{2} - \frac{(x-4)^2}{3} \leq \frac{8x-5}{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{(2x-3)^2}{2} - \frac{(x-4)^2}{3} &\leq \frac{8x-5}{6} \quad \text{m.c.m.}(2, 3, 6) = 6 \\ 3(4x^2 - 12x + 9) - 2(x^2 - 8x + 16) &\leq 8x - 5 \implies 12x^2 - 36x + 27 - 2x^2 + 16x - 32 - 8x + 5 \leq 0 \\ 10x^2 - 28x &\leq 0 \implies 5x^2 - 14x \leq 0 \end{aligned}$$

Inecuación de segundo grado con una incógnita.

- Soluciones de la ecuación de segundo grado incompleta: $x(5x - 14) = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases}$

- Descomposición en factores: $5x \cdot \left(x - \frac{14}{5}\right) \leq 0$ y estudio del signo.



Solución de la inecuación: $x \in \left[0, \frac{14}{5}\right]$

$$c) \frac{-2x^2 + 7x - 5}{x^2 - 4x + 4} > 0$$

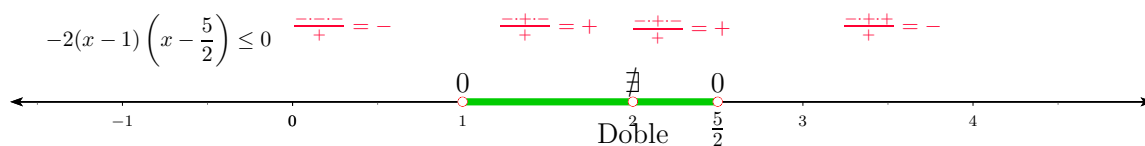
- Raíces (ceros) del numerador y denominador:

$$-2x^2 + 7x - 5 = 0 \iff 2x^2 - 7x + 5 = 0 \implies x = \frac{7 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \implies (x - 2)^2 = 0 \implies x_3 = 2 \text{ DOBLE}$$

- Descomposición factorial: $\frac{-2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-2)^2} > 0$

- Estudio del SIGNO de la fracción (regla de los signos):



Solución de la inecuación: $x \in (1, 2) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right] = \left(1, \frac{5}{2}\right) \setminus \{2\}$

- ③ El profesor de Pedro calcula la nota final valorando en un 70 % la de los exámenes y en un 30 % otras notas (ejercicios de clase, trabajos, etc.). Pedro tiene un 9 de nota de clase. ¿Qué puntuación debe sacar en el examen para que su nota final sea de, al menos, 6,2 puntos?

- Incógnita del problema: *Nota del examen* x puntos.
- Restricción del problema $x \in [0, 10]$
- Plantear la inecuación (al menos 6,2):

$$0,7x + 0,3 \cdot 9 \geq 6,2$$

- Solución matemática de la inecuación:

$$0,7x + 0,3 \cdot 9 \geq 6,2 \stackrel{(\cdot 10)}{\implies} 7x + 27 \geq 62 \implies 7x \geq 35 \implies x \geq 5 \implies x \in [5, +\infty)$$

- Solución real del problema:

$$x \in [0, 10] \cap [5, +\infty) = [5, 10]$$

- ④ La tirada de una revista mensual tiene unos costes de edición de 30000 euros, a los que hay que sumar 1,50 euros de gastos de distribución por cada revista publicada.

Si cada ejemplar se vende a 3,50 euros y se obtienen unos ingresos de 12000 euros por publicidad, ¿cuántas revistas se deben vender para empezar a conseguir beneficios?

⇒ Número de revistas: $x \in \mathbb{N}$.

⇒ Los beneficios son la diferencia entre los ingresos (I) y los gastos (G).

$$\text{Ingresos: } \begin{cases} \text{Publicidad: } 12000 \text{ €} \\ \text{Ventas } 3,5 \cdot x \text{ €} \end{cases} \implies I(x) = 12000 + 3,5x$$

$$\text{Gastos } \begin{cases} \text{Edición: } 30000 \text{ €} \\ \text{Distribución: } 1,5 \cdot x \text{ €} \end{cases} \implies G(x) = 30000 + 1,5x$$

$$\text{Beneficio: } B(x) = I(x) - G(x) = 12000 + 3,5x - (30000 + 1,5x) = 2x - 18000$$

⇒ *Conseguir beneficio*, matemáticamente, $2x - 18000 > 0$

⇒ Solución de la inecuación lineal $x > 9000 \implies x \in (9000, +\infty)$.

⇒ Solución real del problema:

Se consiguen beneficios vendiendo más de 9000 revistas.