

- ① a) Resolver la ecuación $z^2 + (1 - 4i)z - (4 + 2i) = 0$
 b) Escribir en forma polar las soluciones de la ecuación de segundo grado.

a) Resolver la ecuación $z^2 + (1 - 4i)z - (4 + 2i) = 0$

Ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-(1 - 4i) \pm \sqrt{(1 - 4i)^2 + 4(4 + 2i)}}{2} = \frac{-(1 - 4i) \pm \sqrt{1 - 8i - 16 + 16 + 8i}}{2} = \frac{-1 + 4i \pm 1}{2} =$$

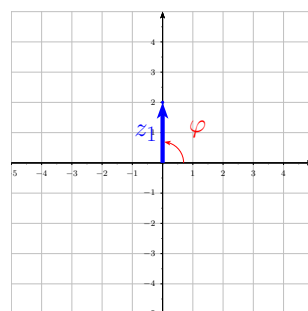
$$= \begin{cases} z_1 = \frac{4i}{2} = 2i \\ z_2 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \end{cases}$$

Las raíces son $z_1 = 2i$ y $z_2 = -1 + 2i$

- b) Escribir en forma polar las soluciones de la ecuación de segundo grado.

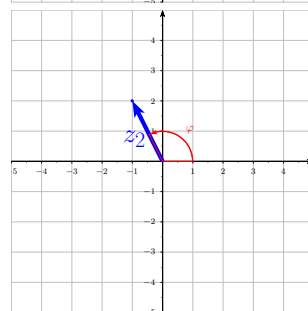
$$z_1 = 2i = (0, 2) \implies \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = 0 \\ \operatorname{Im}(z_1) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Módulo: } |z_1| = +\sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \\ \text{Argumento principal: } \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$z_2 = -1 + 2i = (-1, 2) \implies \begin{cases} \operatorname{Re}(z_2) = -1 \\ \operatorname{Im}(z_2) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Módulo: } |z_2| = +\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ \text{Argumento principal:} \end{cases}$$



El afijo del complejo z_2 está situado en el segundo cuadrante por lo tanto $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z_2) < \pi$

$$\operatorname{Arg}(z_2) = 180^\circ - \arctan\left(\frac{2}{1}\right) = 180^\circ - 63,43494882^\circ = 116,5650512^\circ = 116^\circ 33' 54,1''$$

$$z_1 = 2 \frac{\pi}{2} \text{ y } z_2 = \sqrt{5}_{116^\circ 33' 54,1''}$$

② Sea $z = -\sqrt{5} + \sqrt{2} i$.

a) Calcular $w = z^4$.

$$\begin{aligned} w &= (-\sqrt{5} + \sqrt{2}i)^4 \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-\sqrt{5})^{4-k} \cdot (\sqrt{2}i)^k = \binom{4}{0} (-\sqrt{5})^4 \cdot (\sqrt{2}i)^0 + \binom{4}{1} (-\sqrt{5})^3 \cdot (\sqrt{2}i)^1 + \\ &+ \binom{4}{2} (-\sqrt{5})^2 \cdot (\sqrt{2}i)^2 + \binom{4}{3} (-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2}i)^3 + \binom{4}{4} (-\sqrt{5})^0 \cdot (\sqrt{2}i)^4 \stackrel{(2)}{=} \\ &= 25 - 20\sqrt{10}i - 60 + 8\sqrt{10}i + 4 = -31 - 12\sqrt{10}i \end{aligned}$$

$$w = z^4 = -31 - 12\sqrt{10}i$$

Razonamientos

- (1) Binomio de Newton.
- (2) Números combinatorios (triángulo de Tartaglia) y potencias de la unidad imaginaria.

b) Hallar el módulo y el argumento del complejo w con la ayuda de la calculadora.

$$w = z^4 = -31 - 12\sqrt{10}i = (-31, -12\sqrt{10})$$

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re}(w) = -31 \\ b = \operatorname{Im}(w) = -12\sqrt{10} \end{cases}$$

Módulo del complejo:

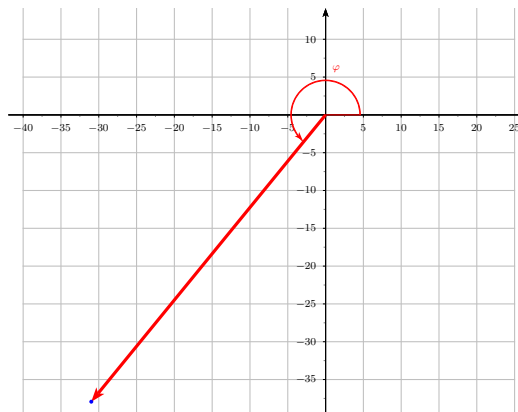
$$|w| = +\sqrt{(-31)^2 + (-12\sqrt{10})^2} = +\sqrt{2401} = 49$$

Argumento de w .

El afijo está situado en el tercer cuadrante
($a < 0$ y $b < 0$), entonces:

$$\varphi = 180^\circ + \arctan\left(\frac{12\sqrt{10}}{31}\right) = 180^\circ + 50,75386705^\circ = 230,75386705^\circ = 230^\circ 45' 13,9''$$

$$|w| = 49 \text{ y } \varphi = 230^\circ 45' 13,9''$$



③ Calcular $\sqrt{-8 - 8\sqrt{3}i}$

$$\sqrt{-8 - 8\sqrt{3}i} = x + iy \text{ siendo } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Por definición de raíz:

$$-8 - 8\sqrt{3}i = (x + iy)^2 \implies -8 - 8\sqrt{3}i = x^2 + 2xyi + y^2i^2 \implies -8 - 8\sqrt{3}i = x^2 + 2xyi - y^2$$

igualdad de números complejos, sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -8\sqrt{3} \end{array} \right\} \implies \boxed{y = \frac{-4\sqrt{3}}{x}} \quad (*)$$

$$x^2 - \frac{48}{x^2} = -8 \implies x^4 + 8x^2 - 48 = 0 \implies x^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-8 \pm 16}{2} = \begin{cases} x^2 = 4 \implies x = \pm 2 \\ x^2 = -12 \implies x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{sustituyendo en } (*) \begin{cases} x = 2 \implies y = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \\ x = -2 \implies y = \frac{-4\sqrt{3}}{(-2)} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de x e y en (1):

$$\text{Las raíces son } \begin{cases} 2 - 2\sqrt{3}i \\ -2 + 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

④ Determinar los números reales a, b para que se verifique $\frac{a+2i}{1-i} + bi = 1$.

Operaciones con números complejos:

$$\frac{a+2i}{1-i} + bi = 1 \xrightarrow{(1)} \frac{(a+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + bi = 1 \implies \frac{a+ai+2i-2}{2} + bi - 1 = 0$$

$$a+ai+2i-2+2bi-2=0 \implies (a-4) + (2+a+2b)i = 0 \xrightarrow{(2)} \begin{cases} a-4=0 \\ 2+a+2b=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$$

$$\text{Los valores son } \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$$

Razonamientos

(1) División de complejos (conjugado del denominador).

(2) Igualdad de complejos en forma binómica (parte real igual a parte real y parte imaginaria igual a parte imaginaria).