

① Dada la circunferencia $C : x^2 + y^2 + 4x + 2y - 21 = 0$:

a) Hallar su centro y radio.

Completando cuadrados:

$$x^2 + 4x + y^2 + 2y - 21 = 0 \implies (x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 21 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 21 + 1 + 4 \implies (x+2)^2 + (y+1)^2 = 26$$

El centro está en el punto $C(-2, -1)$ y el radio $R = \sqrt{26}$

b) Hallar las ecuaciones de las tangentes, T , a la circunferencia que son perpendiculares a la recta de ecuación $r : 5x - y + 3 = 0$.

Si las tangentes son perpendiculares a la recta r entonces pertenecen al haz de RECTAS PERPENDICULARES a r .

$$r \perp T \iff \vec{n}_r \perp \vec{n}_T \text{ entonces}$$

$$\vec{n}_r = (5, -1) \implies \vec{n}_T = (1, 5) \implies \text{haz de rectas } \perp: x + 5y + k = 0 \forall k \in \mathbb{R}$$

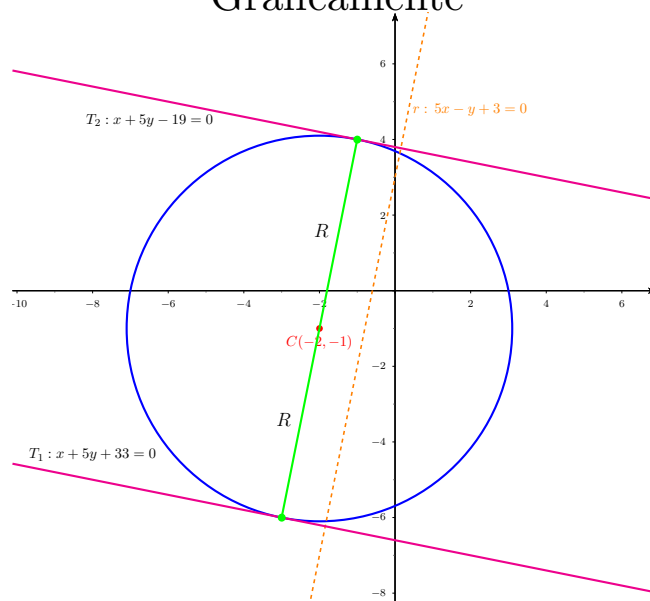
Si son tangentes a la circunferencia C , la distancia del centro $C(-2, -1)$ a la recta tangente es el RADIO.

$$d(C, T) = R = \sqrt{26} \implies \frac{|-2 - 5 + k|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \sqrt{26} \iff |-7 + k| = 26 \implies \begin{cases} -7 + k = 26 \implies k = 33 \\ -7 + k = -26 \implies k = -19 \end{cases}$$

Sustituyendo k en el haz de rectas:

Las tangentes son $T_1 : x + 5y + 33 = 0$ y $T_2 : x + 5y - 19 = 0$

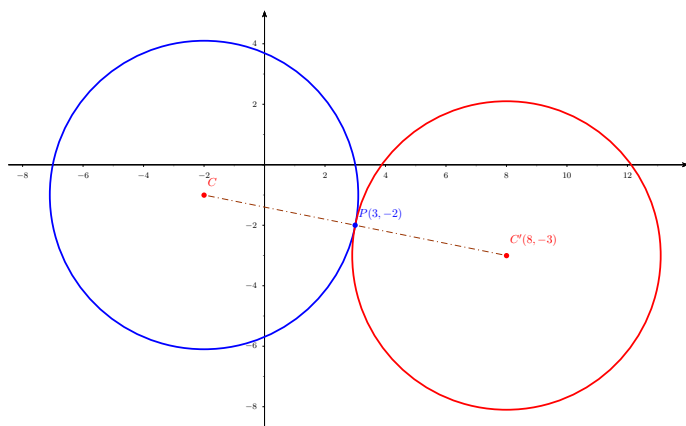
Gráficamente



- c) Hallar la ecuación de la circunferencia C' que es tangente exterior a C en el punto $P(3, -2)$ y tiene la misma superficie que C .

Las circunferencias C y C' son tangentes exteriores en el punto de P y tienen el mismo radio, $R = \sqrt{26}$, al tener la misma superficie. Entonces el centro de la circunferencia C' es el simétrico del centro de C respecto de P , es decir, el punto P es el punto medio del segmento de extremos los centros de las circunferencias tangentes. Sea $C'(\alpha, \beta)$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha - 2}{2} = 3 \implies \alpha = 8 \\ \frac{\beta - 1}{2} = -2 \implies \beta = -3 \end{array} \right\}$$



La ecuación de la circunferencia es: $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 26$.

Desarrollando los cuadrados: $x^2 + y^2 - 16x + 6y + 47 = 0$.