

Sucesiones

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

13 de enero de 2014

Límite de una sucesión

Definición

Se dice que la sucesión (a_n) tiene por límite el número real a y se denota por $\lim_n a_n = a$ cuando para todo número real positivo ε , muy pequeño, existe un término a_{n_0} de la sucesión, tal que a partir de él la diferencia, en valor absoluto, de todos los términos siguientes con a es menor que ε

$$\lim_n a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - a| < \varepsilon \forall n > n_0$$

Es equivalente a:

$$\lim_n a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ tal que } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \forall n > n_0$$

Definición (Sucesión convergente)

Las sucesiones que tienen límite real reciben el nombre de convergentes.

Propiedades de los límites

- El límite de una sucesión, si existe, es ÚNICO.
- Toda sucesión convergente está ACOTADA.
- Toda sucesión **creciente y acotada superiormente** tiene límite (convergente).
- Toda sucesión **decreciente y acotada inferiormente** tiene límite (convergente).

Definición (Sucesiones divergentes)

La sucesión (a_n) tiene por límite $+\infty$ y se escribe $\lim_n a_n = +\infty$ si

$$\lim_n a_n = +\infty \iff \forall K > 0, \exists n_0(K) \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n > K, \forall n > n_0$$

La sucesión (a_n) tiene por límite $-\infty$ y se escribe $\lim_n a_n = -\infty$ si

$$\lim_n a_n = -\infty \iff \forall K < 0, \exists n_0(K) \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n < K, \forall n > n_0$$

Propiedades

- Toda sucesión **creciente y NO acotada superiormente** es DIVERGENTE entonces $\lim_n a_n = +\infty$.
- Toda sucesión **decreciente y NO acotada inferiormente** es DIVERGENTE entonces $\lim_n a_n = -\infty$.

Cálculo de límites

- Sucesiones constantes $(k, k, k, k, k, \dots)$ entonces $\lim_n k = k$.
- Sucesión $(n) = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ entonces $\lim_n n = +\infty$.
- Sucesión $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ entonces $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

Operaciones con sucesiones

Límite de una suma de sucesiones

$\lim_n (a_n + b_n)$			
$\lim_n a_n$	a	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_n b_n$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
b	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ind
$-\infty$	$-\infty$	ind	$-\infty$

Límite de una diferencia de sucesiones

$\lim_n (a_n - b_n)$			
$\lim_n a_n$	a	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_n b_n$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
b	$a - b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ind	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ind

Límite de un producto de sucesiones

$\lim_n (a_n \cdot b_n)$				
$\lim_n a_n$	$a \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_n b_n$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$b \neq 0$	$a \cdot b$	0	$b > 0 : +\infty$ $b < 0 : -\infty$	$b > 0 : -\infty$ $b < 0 : +\infty$
0	0	0	ind	ind
$+\infty$	$a > 0 : +\infty$ $a < 0 : -\infty$	ind	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$a > 0 : -\infty$ $a < 0 : +\infty$	ind	$-\infty$	$+\infty$

Si $\lim_n a_n = 0$ y la sucesión b_n está acotada entonces $\lim_n (a_n \cdot b_n) = 0$

Límite de un cociente de sucesiones

$\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right) (x)$				
$\lim_n a_n$	$a \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_n b_n$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$	0	$b > 0 : +\infty$ $b < 0 : -\infty$	$b > 0 : -\infty$ $b < 0 : +\infty$
0	**	ind	**	**
$+\infty$	0	0	ind	ind
$-\infty$	0	0	ind	ind

**: Es una indeterminación especial. El límite del cociente puede ser:

$$+\infty \circ -\infty \circ \nexists \lim_n \frac{a_n}{b_n}$$

Se estudian los **signos** de las sucesiones del numerador y del denominador.

Límite de sucesiones exponenciales

$\lim_n (a_n)^{b_n}, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$					
$\lim_n a_n$	0	$0 < a < 1$	1	$a > 1$	$+\infty$
$\lim_n b_n$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$b \neq 0$	$b > 0: 0$ $b < 0: +\infty$	a^b	1	a^b	$b > 0: +\infty$ $b < 0: 0$
0	ind	1	1	1	ind
$+\infty$	0	0	ind	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ind	0	0

INDETERMINACIONES

- Suma, Diferencia: $\infty - \infty$
- Producto: $0 \cdot \infty$
- Cociente: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$
- Exponencial: 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0