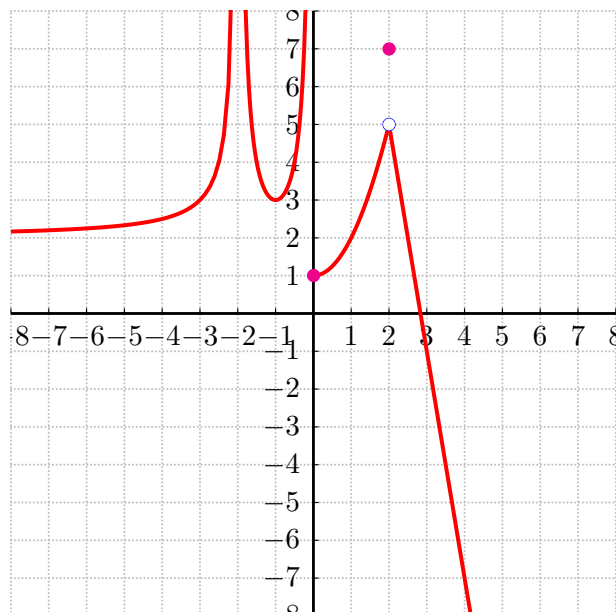


6.1. Límites

① Dada la función $f(x)$, calcular, **si existen**, los límites:



- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | g) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ | h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ | j) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | k) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ |

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ | i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ | j) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ | g) $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | k) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ | h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ |

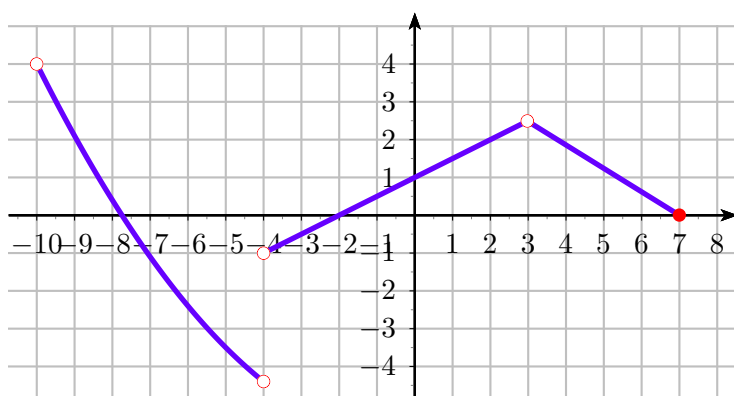
② Sea la función $f(x)$ cuya gráfica es la adjunta:

- (a) Hallar el dominio máximo de la función y su recorrido.

$$D_f = (-10, 7] \setminus \{-4, 3\}$$

$$Im f = (-4, 5, 4)$$

- (b) Hallar, razonadamente y si existen, los siguientes límites:



- (I) $\lim_{x \rightarrow -10^-} f(x)$. No se puede calcular el límite por la izquierda en un punto si no hay función definida a su izquierda.

- (II) $\lim_{x \rightarrow -10^+} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la derecha tienden a 4. $\lim_{x \rightarrow -10^+} f(x) = 4$

- (III) $\lim_{x \rightarrow -9} f(x)$. Los límites laterales existen y son iguales: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -9^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -9^+} f(x) = 2 \end{cases}$ entonces $\lim_{x \rightarrow -9} f(x) = 2$

(IV) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la izquierda tienden a $-4, 5$. $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -4, 5$

(V) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la derecha tienden a -1 . $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -1$.

De los apartados anteriores se deduce: $\nexists \lim_{x \rightarrow -4} f(x)$.

(VI) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Los límites laterales existen y son iguales: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases}$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

(VII) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la izquierda tienden a $\frac{5}{2}$. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{5}{2}$

(VIII) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la derecha tienden a $\frac{5}{2}$. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{5}{2}$.

De los apartados anteriores se deduce: $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{5}{2}$.

(IX) $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la izquierda tienden a 0 . $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 0$

(X) $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$. No se puede calcular el límite en un punto si no hay función definida ni a su izquierda ni a su derecha.

③ Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+4} & \text{si } x < -4 \\ -3 & \text{si } x = -4 \\ \frac{1}{4}x^2 - 2 & \text{si } -4 < x < 2 \\ 4 - 2\sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases} :$

(a) Hallar el dominio máximo de la función.

(b) Calcular, **razonadamente**, los límites:

(I) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(II) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

(III) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(IV) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(a) Hallar el dominio máximo de la función.

Dominios de las funciones:

- Si $f_1(x) = \frac{-1}{x+4}$ entonces $Df_1 = \{x \in \mathbb{R} | x+4 \neq 0\} \cap (-\infty, -4) = (-\infty, -4)$
- Si $x = -4$ entonces $f(-4) = -3 \implies -4 \in D_f$
- Si $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ entonces $Df_2 = \mathbb{R} \cap (-4, 2) = (-4, 2)$.
- Si $f_3(x) = 4 - 2\sqrt{x-2}$ entonces $Df_3 = \{x \in \mathbb{R} | x-2 > 0\} \cap (4, +\infty) = (2, +\infty)$

El dominio de la función es:

$$D_f = D_{f_1} \cup \{-4\} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

(b) Calcular, **razonadamente**, los límites:

(I) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+4} = \frac{-1}{-\infty} = 0$.

(II) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$. Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{-4-h+4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{-h} = \frac{-1}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4}(-4+h)^2 - 2 \right] = 4 - 2 = 2$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -4} f(x)$$

(III) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Límites laterales:

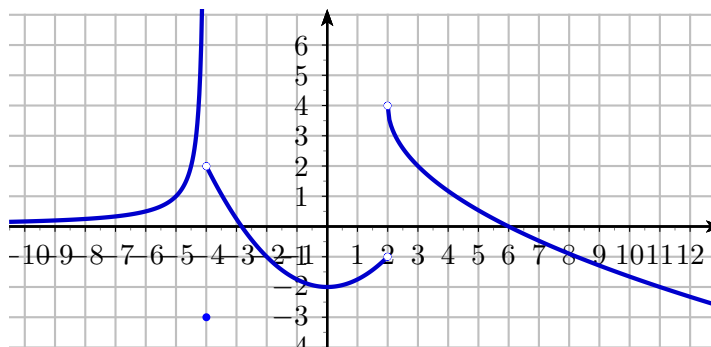
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4}(2-h)^2 - 2 \right] = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[4 - 2\sqrt{2+h-2} \right] = 4$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

(IV) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [4 - 2\sqrt{x-2}] = 4 - \infty = -\infty$

La gráfica de la función es:



④ Calcular los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^3 - 7x - 4x^2 + 9}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^3 - 7x - 4x^2 + 9} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(2x^2 - 2x - 9)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+6}{2x^2 - 2x - 9} = \frac{7}{-9} = -\frac{7}{9}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + 4}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + 4} = \frac{12 - 10 - 1}{4 + 4} = \frac{0}{8} = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{\sqrt{3x+7} - 4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{\sqrt{3x+7} - 4} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x^2 - 5x - 12) \cdot (\sqrt{3x+7} + 4)}{(\sqrt{3x+7} - 4) \cdot (\sqrt{3x+7} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{3x + 7 - 16} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{3x+7} + 4) \stackrel{8 \cdot 0}{=} 8 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (3x+4)}{3(x-3)} = \\ &= 8 \cdot \frac{13}{3} = \frac{104}{3} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right) = \infty - \infty, \text{ indeterminación}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right)}{\left(\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 4 - (x^2 + 2x - 3)}{\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 6x + 4 - \cancel{x^2} - 2x + 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x + 7}{\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \frac{-8}{1 + 1} = -4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right) = -4$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11}}{3x^2 + 2x - 8} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{9}}{12 - 4 - 8} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminación}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11}}{3x^2 + 2x - 8} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - 3x - 1} + \sqrt{x + 11} \right)}{(3x^2 + 2x - 8) \cdot \left(\sqrt{x^2 - 3x - 1} + \sqrt{x + 11} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 1} + \sqrt{x + 11}} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 1 - x - 11}{3x^2 + 2x - 8} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{3x^2 + 2x - 8} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x-6)}{\cancel{(x+2)} \cdot (3x-4)} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-8}{-10} \right) = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11}}{3x^2 + 2x - 8} = \frac{2}{15}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} - \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} \right) = \infty - \infty, \text{ indeterminación}$$

Suma de fracciones algebraicas, el m.c.m. de los denominadores es $x(x - 2)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} - \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 + 2x - 4) - (2x + 4)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 6x - 4}{x(x - 2)} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2 + 4x + 2)}{x \cdot \cancel{(x-2)}} = \frac{4 + 8 + 2}{2} = 7 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} - \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} \right) = 7$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

Descomponiendo factorialmente los polinomios:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -9 & 12 & -4 \\
 2 & & 4 & -10 & 4 \\
 \hline
 & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} \\
 2 & & 4 & -2 & \\
 \hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -4 & 8 \\
 2 & & 2 & 0 & -8 \\
 \hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\
 2 & & 2 & 4 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} &
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(2x-1)}{(x-2)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{3}{4}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^3 - 5x - 3}}{2x^2 - x - 15} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^3 - 5x - 3}}{2x^2 - x - 15} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^3 - 5x - 3}) \cdot (\sqrt{x^2 - 4x + 12} + \sqrt{x^3 - 5x - 3})}{(2x^2 - x - 15) \cdot (\sqrt{x^2 - 4x + 12} + \sqrt{x^3 - 5x - 3})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 12} + \sqrt{x^3 - 5x - 3}} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 4x + 12) - (x^3 - 5x - 3)}{2x^2 - x - 15} = \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^3 + x^2 + x + 15}{2x^2 - x - 15} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)(x^2 + 2x + 5)}{(x-3)(2x+5)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-20}{11} = -\frac{10}{33}
 \end{aligned}$$

Descomposición factorial:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 1 & 1 & 15 \\
 3 & & -3 & -6 & -15 \\
 \hline
 & -1 & -2 & -5 & \boxed{0} \\
 3 & & -3 & -15 & \\
 \hline
 & -1 & -5 & \boxed{-20} &
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^3 - 5x - 3}}{2x^2 - x - 15} = -\frac{10}{33}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right) = \infty - \infty \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-1}{x-2} - \frac{-3}{x^3-8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x^3-8} - \frac{1}{x-2} \right)$$

Descomponiendo factorialmente el polinomio $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

El m.c.m. de los denominadores es: $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x^3-8} - \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - (x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 2x - 1}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right) = \infty$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 5x + 8} - x \right) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 2} \right) = \infty - \infty \text{ IND}$$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 2} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 2} \right)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2 - 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 2}} \stackrel{||8||}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(4 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right)} = \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 2} \right) = 2$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 3} - x} = \frac{1}{\infty - \infty} \text{ IND}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 3} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 3} + x}{\left(\sqrt{x^2 - 5x + 3} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - 5x + 3} + x \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 3} + x}{x^2 - 5x + 3 - x^2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right)}{\cancel{x} \left(-5 + \frac{3}{x} \right)} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 3} - x} = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 + 4x^2 - 3} + \sqrt{9x^2 - 3}}{2 - 5x} = \frac{\infty}{\infty}$$

El numerador y el denominador tienen grado **uno**, se extrae factor común x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 + 4x^2 - 3} + \sqrt{9x^2 - 3}}{2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt[5]{32 + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^5}} + \sqrt{9 - \frac{3}{x^2}} \right)}{\cancel{x} \left(\frac{2}{x} - 5 \right)} = \frac{2+3}{-5} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 + 4x^2 - 3} + \sqrt{9x^2 - 3}}{2 - 5x} = -1$$

$$\textcircled{5} \text{ Hallar, si existen, las asíntotas de la función } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2} & \text{si } x < -2 \\ 6 & \text{si } x = -2 \\ \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 10x + 12} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Dominio de la función:

- Si $x < -2$ el denominador no se anula en $(-\infty, -2)$.
- 2 tiene imagen: $2 \in D_f$.
- Si $x > -2$ el denominador es: $2x^2 + 10x + 12 = 2(x + 2)(x + 3)$, no se anula en $(-2, +\infty)$.

El dominio de la función es: $\mathbb{R}$

Asíntotas verticales: $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ se verifica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$, no verifica la definición de asíntota vertical. En $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-2 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2 - h)^2 + 5(-2 - h) - 3}{-2 - h - 2} = \frac{8 - 10 - 3}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-2 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2 + h)^2 + 5(-2 + h) - 2}{2(-2 + h)^2 + 10(-2 + h) + 12} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - 12h + 12 - 10 + 5h - 2}{2h^2 - 8h + 8 - 20 + 10h + 12} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - 7h}{2h^2 + 2h} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h - 7)}{h(2h + 2)} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical si $x \rightarrow -2^-$

Asíntotas horizontales:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 10x + 12} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La recta $y = \frac{3}{2}$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$

Asíntota oblicua Si hay será cuando $x \rightarrow -\infty$. Efectuando la división de los polinomios:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 3 \big| x + 2 \\ -2x^2 - 4x \quad \quad 2x + 1 \\ \hline x - 3 \\ -x - 2 \\ \hline -5 \end{array}$$

Aplicando el algoritmo de la división: $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2} = 2x + 1 + \frac{-5}{x + 2}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x + 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)$$

La recta $y = 2x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$