

① Hallar los límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2x \right) = +\infty - \infty \text{ IND}$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2x \right) \cdot \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2x \right)}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 5x + 1 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(5 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{5}{2+2} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2x \right) = \frac{5}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2 - \sqrt{2x^2 - 5x - 2}}{x^2 - x - 6} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2 - \sqrt{2x^2 - 5x - 2}}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\left((x - 2) - \sqrt{2x^2 - 5x - 2} \right) \cdot \left((x - 2) + \sqrt{2x^2 - 5x - 2} \right)}{(x^2 - x - 6) \cdot \left((x - 2) + \sqrt{2x^2 - 5x - 2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)^2 - (2x^2 - 5x - 2)}{(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot \left((x - 2) + \sqrt{2x^2 - 5x - 2} \right)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + 5x + 2}{x - 3} = \\ &= \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -\frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2 - \sqrt{2x^2 - 5x - 2}}{x^2 - x - 6} = -\frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2} \right) = \infty - \infty \text{ IND}$$

Suma de fracciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3) \cdot (x - 2) - (x^2 - 5x + 2)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6 - (x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 2x - 2)}{(x - 1) \cdot (x - 2)(x + 1)} \stackrel{6}{=} \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + 7x^2 - 6x - 4}{x + 1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{0} = \infty \end{aligned}$$

Los límites laterales $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$ entonces $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2} \right)$ NO EXISTE

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 4x^3 + 7x - 2}{3x^2 - x^3 + 7} \right)^{\frac{2x^2 + 5}{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-4x^3 + 3x^2 + 7x - 2}{-x^3 + 3x^2 + 7} \right)^{\frac{2x^2 + 5}{x - 2}} = 4^{-\infty} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 2}{2x + 1} \right)^{\frac{x + 3}{x^2 - 9}} = 1^\infty \text{ IND}$$

Definición del número e .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 2}{2x + 1} \right)^{\frac{x + 3}{x^2 - 9}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\boxed{1+} \frac{x^2 - 2}{2x + 1} \boxed{-1} \right)^{\frac{x + 3}{x^2 - 9}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\left(1 + \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 1} \right)^{\frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3}} \right]^{\frac{x + 3}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3) \cancel{(x + 3)}(x + 1)}{\cancel{(x^2 - 9)}(2x + 1)}} = e^{\frac{4}{7}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 2}{2x + 1} \right)^{\frac{x + 3}{x^2 - 9}} = e^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{e^4}$$

② Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 1}{2x + 5} & \text{si } x < -\frac{5}{2} \\ x^2 - 1 & \text{si } -\frac{5}{2} \leq x < 1. \\ \frac{3x^2}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Hallar su dominio.

b) Calcular, si existen, las asíntotas de la función.

a) Función a trozos.

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3} = (-\infty, -5/2) \cup [-5/2, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

b) **Asíntotas verticales:**

$\lim_{x \rightarrow -5/2} f(x)$, límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -5/2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-5/2 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{5}{2} - h\right)^2 + 3\left(-\frac{5}{2} - h\right) - 1}{2\left(-\frac{5}{2} - h\right) + 5} = \frac{\frac{25}{4} - \frac{15}{2} - 1}{-0} = \frac{-k}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -5/2^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-5/2 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-5/2 + h)^2 - 1 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La recta $x = -\frac{5}{2}$ es asíntota vertical de la función cuando $x \rightarrow -\frac{5}{2}$ por la izquierda.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1-h) = \lim_{h \rightarrow 0} (1-h)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2}{(1+h)^2 - 1} = \frac{3}{+0} = +\infty \end{cases}$$

La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función cuando $x \rightarrow 1$ por la derecha.

Asíntotas horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{2x + 5} \stackrel{\infty}{=} -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 1} \stackrel{\infty}{=} 3 \end{aligned}$$

La recta $y = 3$ es asíntota horizontal de la función cuando $x \rightarrow +\infty$.

c) **Asíntota oblicua:** La función puede tener A.O. cuando $x \rightarrow -\infty$. Efectuando la división de polinomios

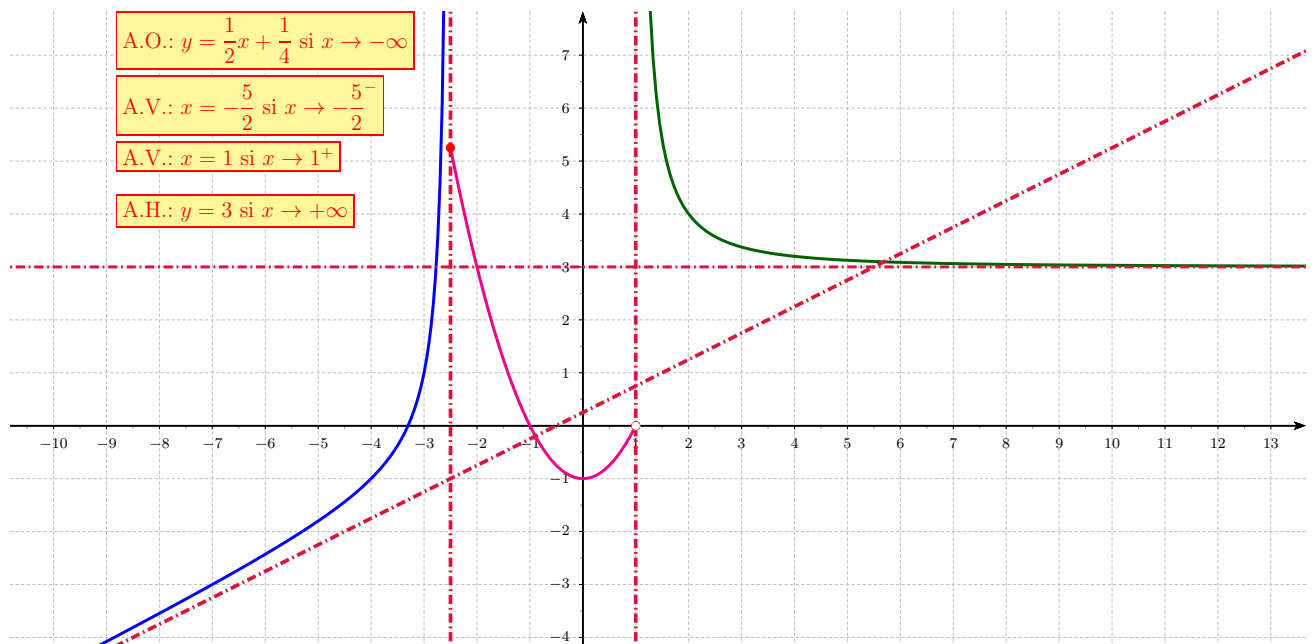
$$\begin{array}{r} \cancel{x^2} + 3x - 1 \quad \Big| \quad \frac{2x + 5}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} \\ \underline{\cancel{x^2} - \frac{5}{2}x} \\ \phantom{\cancel{x^2}} \frac{1}{2}x - 1 \\ \underline{\phantom{\cancel{x^2}} - \frac{1}{2}x} \\ \phantom{\cancel{x^2}} -\frac{9}{4} \end{array}$$

La función se expresa: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{\frac{9}{4}}{2x + 5}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9}{4}}{2x + 5}$$

La recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ es asíntota oblicua de la función cuando $x \rightarrow -\infty$.

La gráfica de la función es:



- ③ Se sabe que el número de delfines que existirán en los próximos años en una reserva natural marítima, viene dado por la función $n(t) = \frac{15000t + 4000}{2t + 2}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

- Determinar el número de delfines que habrá dentro de 9 años.
- ¿Cuántos años han de pasar hasta que hayan 7250 delfines?
- Dibujar, razonadamente, la gráfica de la función.
- Interpretar las asíntotas de la función.

- a) El dominio de la función es $D = [0, +\infty]$.

$$n(t=9) = \frac{7500 \cdot 9 + 2000}{9 + 1} = \frac{7500 \cdot 9 + 2000}{10} = 750 \cdot 9 + 200 = 6950$$

Dentro de nueve años habrá 6950 delfines en la reserva.

- b) Antiimagen de 7250:

$$\frac{7500t + 2000}{t + 1} = 7250 \implies 7500t + 2000 = 7250(t + 1) \implies 30t + 8 = 29t + 29 \implies t = 21$$

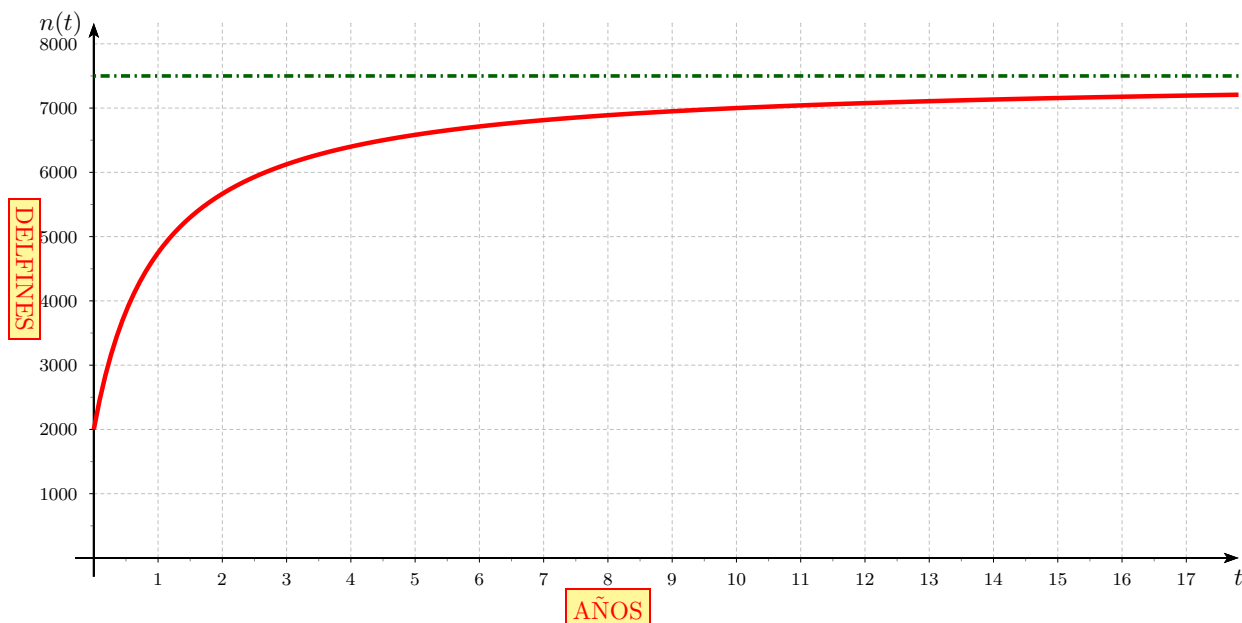
Deben transcurrir 21 años para que la reserva tenga 7250 delfines.

- c) Función de proporcionalidad inversa.

$$\begin{array}{r|l} 7500t & +2000 \\ \hline -7500t & -7500 \\ \hline & -5500 \end{array} \quad \begin{array}{l} t+1 \\ 7500 \end{array}$$

$$n(t) = 7500 - \frac{5500}{t + 1}$$

La recta $y = 7500$ es AH de la función cuando $t \rightarrow +\infty$



- d) En el futuro el número de delfines de la reserva tenderá a un máximo de 7500.