

CAPÍTULO 2

CÁLCULO INTEGRAL

2.1. Cálculo de primitivas

① Hallar una función cuya derivada sea $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ y que se anule para $x = 1$.

$$F(x) = \int f(x) \, dx = \int (4x^3 - 7x^2 + 5x - 1) \, dx = x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + C$$

Se anula para $x = 1$, es decir, $F(x = 1) = 0 \implies 1 - \frac{7}{3} + \frac{5}{2} - 1 + C = 0 \implies C = -\frac{1}{6}$

$$F(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}$$

② Hallar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que alcanza en $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ un punto de inflexión con tangente horizontal y $f''(x) = ax - 6$.

☞ La función $f(x)$ alcanza un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$, condición necesaria de p.i. su segunda derivada $f''(x = \frac{1}{2}) = 0$:

$$\frac{a}{2} - 6 = 0 \implies \boxed{a = 12}$$

☞ La función primera derivada es una primitiva de la función segunda derivada:

$$f'(x) = \int (12x - 6) \, dx = 6x^2 - 6x + C_1$$

☞ La función $f(x)$ alcanza un punto de inflexión con TANGENTE HORIZONTAL en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$, la primera derivada en $x = \frac{1}{2}$ es CERO.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{4} - \frac{6}{2} + C_1 = 0 \implies \boxed{C_1 = \frac{3}{2}}$$

☞ La función $f(x)$ es una primitiva de la función primera derivada:

$$f(x) = \int \left(6x^2 - 6x + \frac{3}{2} \right) dx = 2x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + C_2$$

☞ El punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ pertenece a la gráfica de la función:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + C_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$$

La función es $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

③ Calcular las integrales indefinidas:

$$(I) \int \left(\frac{8}{3}x^3 - x^2 - 7 \right) dx = \frac{8}{3} \int x^3 dx - \int x^2 dx - \int 7 dx = \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$$

(II)

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 8x^2 - 6x + 3}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - 8 \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx - 6 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\ &= 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{16}{5}x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

$$(III) \int \left(\sqrt[5]{x^3} + 2 \right) dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx + 2 \int dx = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + 2x + C$$

$$(IV) \int \left(5^x - x^{\frac{2}{3}} - 2 \right) dx = \int 5^x dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx - 2 \int dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - 2x + C$$

$$(V) \int (2x^2 - 1)^2 dx = \int (4x^4 - 4x^2 + 1) dx = \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x + C$$

$$(VI) \int x^2 \cdot (2x^2 - 5x + 2\sqrt{x}) dx = \int \left(2x^4 - 5x^3 + 2x^{\frac{5}{2}} \right) dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$(VII) \int \left(\frac{1}{3} \sin x + \frac{4}{5} \cos x + \pi \right) dx = -\frac{1}{3} \cos x + \frac{4}{5} \sin x + \pi x + C$$

$$(VIII) \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 3 \sin x \right) dx = \frac{1}{8}x^4 + 3 \cos x + C$$

$$(IX) \int \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{99} \cdot x dx$$

$$\int \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{99} \cdot x dx = \frac{3}{4} \int \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{99} \cdot \frac{4}{3}x dx = \frac{3}{400} \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{100} + C$$

$$(X) \int \sqrt[5]{x^2 + 1} \cdot x dx$$

$$\int \sqrt[5]{x^2 + 1} \cdot x dx = \frac{1}{2} \int \left(x^2 + 1 \right)^{\frac{1}{5}} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} (x^2 + 1)^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{12} (x^2 + 1)^{\frac{6}{5}} + C$$

$$(XI) \int \sqrt{(e^x - 3)^5} \cdot e^x dx$$

$$\int \sqrt{(e^x - 3)^5} \cdot e^x dx = \int \left(e^x - 3 \right)^{\frac{5}{2}} \cdot e^x dx = \frac{2}{7} (e^x - 3)^{\frac{7}{2}} + C$$

$$(XII) \int \frac{x+3}{x^2+6x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+6x-1| + C$$

$$(XIII) \int \tan(2x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos(2x)} \cdot 2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \ln|\cos(2x)| + C$$

$$(XIV) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+7}} dx = \frac{1}{3} \int (x^3+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 dx = \frac{2}{3} (x^3+7)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+7} + C$$

$$(XV) \int \sin\left(\frac{5}{3}x\right) dx = -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{5}{3}x\right) + C$$

$$(XVI) \int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int (\sin x)^4 \cdot \cos x dx = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$(XVII) \int \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

$$(XVIII) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx = \frac{2}{2} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1} + C$$

$$(XIX) \int \left(\sqrt{x} + \frac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\sqrt{x} + \sqrt{x} - x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \right) dx = \int \left(2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{6}} \right) dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + C$$

$$(XX) \int 4 \cdot e^{-3x} dx = 4 \cdot \frac{-1}{3} \int e^{-3x} \cdot (-3) dx = -\frac{4}{3} e^{-3x} + C$$

$$(XXI) \int \sin x \cdot e^{2 \cos x} dx = -\frac{1}{2} \int e^{2 \cos x} \cdot (-2 \sin x) dx = -\frac{1}{2} e^{2 \cos x} + C$$

$$(XXII) \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan^2 x + C$$

$$(XXIII) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

$$(XXIV) \int \frac{e^x}{\cos^2 e^x} dx = \tan e^x + C$$

$$(XXV) \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1+(\sin x)^2} \cdot \cos x dx = \arctan(\sin x) + C$$

$$(XXVI) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln|1+e^x| + C$$

$$(XXVII) \int \frac{2x-1}{x^2-x+3} dx = \ln|x^2-x+3| + C$$

$$(XXVIII) \int \frac{\sqrt[3]{4+5\ln(2x)}}{x} dx$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{4+5\ln(2x)}}{x} dx = \frac{1}{5} \int \left(\boxed{4+5\ln(2x)} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \boxed{\frac{5}{x} dx} = \frac{3}{20} (4+5\ln(2x))^{\frac{4}{3}} + C$$

④ Calcular las integrales:

- (a) $\int \frac{x^3 - x - 1}{x^3 - 3x - 2} dx$. Integral racional impropia: grado del polinomio del numerador igual que el grado del polinomio del denominador.

$$\frac{x^3 - x - 1}{x^3 - 3x - 2} = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 3x - 2} + \frac{-x + 1}{x^3 - 3x - 2}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ -3 \ -2 \\ \boxed{-1} \quad -1 \ 1 \ 2 \\ \hline 1 \ -1 \ -1 \ \boxed{0} \\ \boxed{-1} \quad -1 \ 2 \\ \hline 1 \ -2 \ \boxed{0} \\ \boxed{2} \quad 2 \\ \hline 1 \ \boxed{0} \end{array}$$

$$\int \frac{x^3 - x - 1}{x^3 - 3x - 2} dx = \int \left[1 + \frac{2x+1}{x^3 - 3x - 2} \right] dx = x + \int \frac{2x+1}{x^3 - 3x - 2} dx$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \Rightarrow$$

$$2x+1 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Si } x = -1 \Rightarrow -1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3} \\ \text{Si } x = 2 \Rightarrow 5 = 9C \Rightarrow C = \frac{5}{9} \\ \text{Si } x = 0 \Rightarrow -2A - 2B + C \Rightarrow A = -\frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x - 1}{x^3 - 3x - 2} dx &= x + \int \frac{2x+1}{x^3 - 3x - 2} dx = x + \int \frac{-\frac{5}{9}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2} dx + \int \frac{\frac{5}{9}}{x-2} dx = \\ &= x - \frac{5}{9} \ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{9} \ln|x-2| = x - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$(b) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{1 + \left(\boxed{e^x} \right)^2} \cdot \boxed{e^x dx} = \arctan e^x + C$$

$$(c) \int e^{\tan(2x)} \frac{1}{\cos^2(2x)} dx = \frac{1}{2} \int e^{\boxed{\tan(2x)}} \cdot \boxed{\frac{2 dx}{\cos^2(2x)}} = \frac{1}{2} e^{\tan(2x)} + C$$

$$(d) \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 - \sin x} dx \text{ Cambio de variable: } \begin{cases} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 - \sin x} dx &\stackrel{(1)}{=} \int \frac{t}{1-t} dt = - \int \frac{t-1+1}{t-1} dt = - \int 1 \cdot dt - \int \frac{1}{t-1} dt = \\ &= -t - \ln|t-1| \stackrel{(2)}{=} -\sin x - \ln|1 - \sin x| + C \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) Efectuando el cambio de variable.

(2) Deshaciendo el cambio de variable.

(e) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$ Cambio de variable: $x^2+4=t^2$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} x \cdot dx \stackrel{(1)}{=} \int \frac{\sqrt{t^2} \cdot t \cdot dt}{t^2-4} = \int \frac{t^2}{t^2-4} dt = \int \frac{t^2-4+4}{t^2-4} dt = \\ &= \int \left[1 + \frac{4}{t^2-4} \right] dt = t + \int \frac{4}{t^2-4} dt \stackrel{(2)}{=} t - \int \frac{1}{t+2} dt + \int \frac{1}{t-2} dt = t - \ln|t+2| + \ln|t-2| \stackrel{(3)}{=} \\ &= \sqrt{x^2+4} + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2} \right| + C \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Efectuando el cambio de variable: $\begin{cases} x^2+4=t^2 \\ 2x dx = 2t dt \end{cases}$
 (2) Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{4}{(t+2)(t-2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} \implies 4 = A(t-2) + B(t+2) \begin{cases} \text{Si } t=2 \implies B=1 \\ \text{Si } t=-2 \implies A=-1 \end{cases}$$

- (3) Deshaciendo el cambio de variable.

(f) $\int \ln(x^2+1) dx$. Es una integral por partes.

$$\int \ln(x^2+1) dx \stackrel{(1)}{=} x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx \stackrel{(2)}{=} x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x + C$$

Razonamientos

- (1) $\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \\ dv = dx \end{cases} \left\| \begin{aligned} du &= \frac{2x}{x^2+1} dx \\ v &= x \end{aligned} \right.$
 (2) Integral racional: $\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = x - \arctan x$

(g) $\int \frac{2x^3 - \sqrt[3]{2}x^2 + 7x - \pi}{x} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - \sqrt[3]{2}x^2 + 7x - \pi}{x} dx &= \int \left(\frac{2x^3}{x} - \frac{\sqrt[3]{2}x^2}{x} + \frac{7x}{x} - \frac{\pi}{x} \right) dx = \int \left(2x^2 - \sqrt[3]{2}x + 7 - \frac{\pi}{x} \right) dx \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}x^2 + 7x - \pi \ln x + C \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Linealidad de la integral e integrales inmediatas (potencias y logaritmo neperiano).

$$\int \frac{2x^3 - \sqrt[3]{2}x^2 + 7x - \pi}{x} dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}x^2 + 7x - \pi \ln x + C$$

(h) $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4x - 9}{x^2 - 2x - 3} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 - 4x - 9}{x^2 - 2x - 3} dx &\stackrel{(1)}{=} \int \left(x + \frac{-x-9}{x^2-2x-3} \right) dx \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{x+9}{x^2-2x-3} dx \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{-2}{x+1} \right) dx \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}x^2 - 3 \ln|x-3| + 2 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Integral racional impropia (grado del polinomio del numerador mayor que el del denominador).
División de polinomios y $D = d \cdot c + R$.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 4x - 9}{-x^3 + 2x^2 + 3x} = \frac{x^2 - 2x - 3}{-x - 9}$$

- (2) Linealidad de la integral.
(3) Integral racional propia y las raíces del polinomio del denominador son reales son

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Descomponiendo en fracciones simples la fracción algebraica:

$$\frac{x+9}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow x+9 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$\begin{cases} \text{Si } x = -1 \Rightarrow 8 = -4B \Rightarrow B = -2 \\ \text{Si } x = 3 \Rightarrow 12 = 4B \Rightarrow A = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4x - 9}{x^2 - 2x - 3} dx = \frac{1}{2}x^2 - 3 \ln|x-3| + 2 \ln|x+1| + C$$

(i) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} dx$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int 3x (x^2+2)^{-\frac{1}{2}} dx \stackrel{(1)}{=} 3 \cdot \frac{1}{2} \int (x^2+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx \stackrel{(2)}{=} \frac{3}{2} \frac{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2+2} + C$$

Razonamientos

- (1) Potencia de base $x^2 + 2$ y la derivada de la base es $2x$.
(2) Integral de una potencia cuasiinmediata.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} dx = 3\sqrt{x^2+2} + C$$

(j) $\int x \ln(x) dx$

$$\int x \ln(x) dx \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Razonamientos

- (1) Integral por partes: $\begin{cases} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx & v = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$\int x \ln(x) dx = \frac{1}{4}x^2(2 \ln x - 1) + C$$

(k) $\int x \cos x^2 dx$

$$\int x \cos x^2 dx \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \int \cos x^2 \cdot 2x dx \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

Razonamientos

- (1) Lectura de la función a integrar: *coseno DE* x^2 .
 (2) Integral cuasiinmediata del coseno.

$$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

$$(1) \int \frac{\sqrt{5}}{x^2 - 6x + 14} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{5}}{x^2 - 6x + 14} dx &\stackrel{(1)}{=} \sqrt{5} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 14} dx \stackrel{(2)}{=} \sqrt{5} \int \frac{1}{5 + (x-3)^2} dx \stackrel{(3)}{=} \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right)^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{5} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 + \left(\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right)^2} dx \stackrel{(3)}{=} \arctan\left(\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Integral racional, no inmediata, y el polinomio del denominador NO tiene raíces reales (raíces complejas).
 (2) Completando cuadrados: $x^2 - 6x + 14 = (x-3)^2 - 9 + 14 = (x-3)^2 + 5$
 (3) Factor común: $5 \left(1 + \frac{(x-3)^2}{5}\right) = 5 \left[1 + \left(\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right)^2\right]$
 (4) Integral cuasiinmediata de la arcotangente: $\int \frac{u'(x)}{1 + [u(x)]^2} dx = \arctan[u(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{5}}{x^2 - 6x + 14} dx = \arctan\left(\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right) + C$$

⑤ Calcular las integrales indefinidas:

$$a) \int \frac{x+1}{(x^2+2x)^4} dx$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^4} dx \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \int \left(x^2+2x\right)^{-4} \cdot 2(x+1) dx \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \frac{(x^2+2x)^{-3}}{(-3)} = -\frac{1}{6} \frac{1}{(x^2+2x)^3} + C$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^4} dx = -\frac{1}{6} \frac{1}{(x^2+2x)^3} + C$$

Razonamientos

- (1) Función potencial de base $x^2 + 2x$ y la derivada de la base es $2x + 2 = 2(x+1)$.
 (2) Integral de una potencia cuasiinmediata.

$$b) \int \frac{3x}{\sqrt[5]{5-2x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{\sqrt[5]{5-2x^2}} dx &\stackrel{(1)}{=} 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \int \left(5-2x^2\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot (-4)(x) dx \stackrel{(2)}{=} -\frac{3}{4} \frac{(5-2x^2)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} = \\ &= -\frac{15}{16} \sqrt[5]{(5-2x^2)^4} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{3x}{\sqrt[5]{5-2x^2}} dx = -\frac{15}{16} \sqrt[5]{(5-2x^2)^4} + C$$

Razonamientos

- (1) Función potencial de base 5 $- 2x^2$ y la derivada de la base es $(-4x)$.
 (2) Integral de una potencia cuasiinmediata.

c) $\int (2x - 3) \tan(x^2 - 3x) \, dx$

$$\int (2x - 3) \tan(x^2 - 3x) \, dx = \int (2x - 3) \cdot \frac{\sin(x^2 - 3x)}{\cos(x^2 - 3x)} \, dx \stackrel{(1)}{=} -\ln |\cos(x^2 - 3x)| + C$$

$$\int (2x - 3) \tan(x^2 - 3x) \, dx = -\ln |\cos(x^2 - 3x)| + C$$

Razonamientos

- (1) La derivada del denominador, $\cos(x^2 - 3x)$, excepto constantes, multiplica al numerador de la fracción. Integral cuasiinmediata: $\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln |u(x)| + C$.

d) $\int (x + \pi) e^x \, dx$

$$\int (x + \pi) e^x \, dx \stackrel{(1)}{=} (x + \pi) e^x - \int e^x \, dx = (x + \pi) e^x - e^x + C$$

$$\int (x + \pi) e^x \, dx = (x + \pi - 1) e^x + C$$

Razonamientos

- (1) Integral por partes: $\begin{cases} u = x + \pi & \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^x \, dx & \Rightarrow & v = \int e^x \, dx = e^x \end{cases} \quad \text{y} \quad \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

e) $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} \, dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} \, dx &\stackrel{(1)}{=} \int \left(5 - \frac{x + 35}{x^2 - 25} \right) \, dx \stackrel{(2)}{=} 5x - \int \frac{x + 35}{(x + 5)(x - 5)} \, dx \stackrel{(3)}{=} \\ &= 5x - \left[\int \frac{-3}{x + 5} \, dx + \int \frac{4}{x - 5} \, dx \right] = 5x + 3 \ln |x + 5| - 4 \ln |x - 5| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} \, dx = 5x + 3 \ln |x + 5| - 4 \ln |x - 5| + C$$

Razonamientos

- (1) Integral racional impropia (grado del polinomio del numerador mayor que el del denominador). División de polinomios y $D = d \cdot c + R$.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - x - 160 \overline{) x^2 - 25} \\ \underline{-5x^2 + 125} \\ -x - 35 \end{array}$$

- (2) Linealidad de la integral.
 (3) Integral racional propia y las raíces del polinomio del denominador son reales son

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Descomponiendo en fracciones simples la fracción algebraica:

$$\begin{aligned} \frac{x + 35}{(x - 5)(x + 5)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 5} \Rightarrow x + 35 = A(x - 5) + B(x + 5) \\ \begin{cases} \text{Si } x = 5 \Rightarrow 40 = 10B \Rightarrow B = 4 \\ \text{Si } x = -5 \Rightarrow 30 = -10A \Rightarrow A = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2. Integral definida

① Sea la función con valores reales $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$. Calcula:

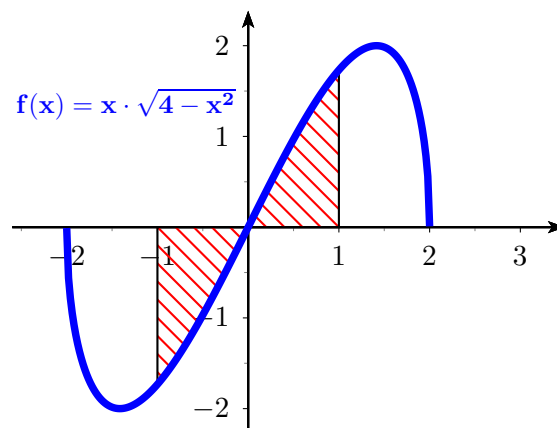
a) $\int_{-1}^1 f(x) dx$

b) El área encerrada por la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

■ Dominio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$.

■ La función es impar: $f(-x) = -f(x)$

■ $\boxed{\int_{-1}^1 f(x) dx = 0}$



■ Área por simetría:

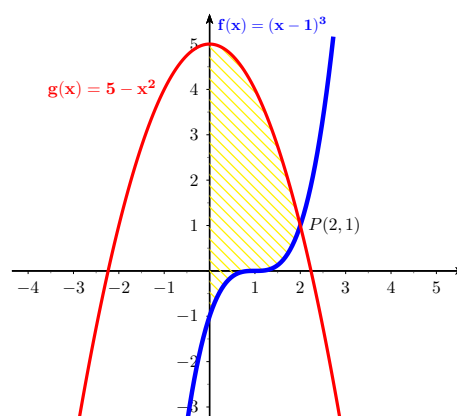
$$S = 2 \int_0^1 x \sqrt{4-x^2} dx = -\frac{2}{3} \left[(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \left[3^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right] = -\frac{2}{3} [3\sqrt{3} - 8] = \frac{16-6\sqrt{3}}{3} \text{ u}^2$$

② Dadas las curvas $y = (x-1)^3$, $y = 5-x^2$ calcular razonadamente:

a) Su punto de corte.

b) El área encerrada por ellas y el eje de ordenadas.

■ Solución del sistema: $\begin{cases} y = (x-1)^3 \\ y = 5-x^2 \end{cases} \Rightarrow P(2,1)$



■ Área:

$$S = \int_0^2 [(5-x^2) - (x-1)^3] dx = \left[5x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \right]_0^2 = \left(10 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) \right) = 10 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3} \text{ u}^2$$

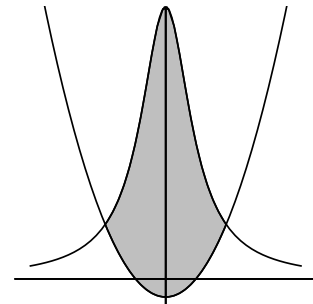
- ③ a) Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $f(x) = \frac{15}{1+x^2}$ y $g(x) = x^2 - 1$
 b) Calcula el área de dicho recinto.

Las dos funciones son pares: simétricas respecto del eje de ordenadas.

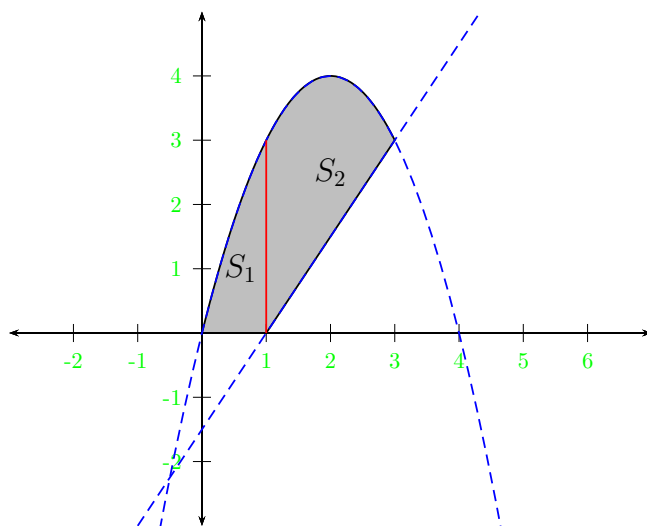
Puntos de corte:

$$\frac{15}{1+x^2} = x^2 - 1 \implies x^4 - 1 = 15 \implies x^4 = 16 \implies x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$$

$$\begin{aligned} S_T &= 2 \int_0^2 \left(\frac{15}{1+x^2} - (x^2 - 1) \right) dx = 2 \left[\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^2 (x^2 - 1) dx \right] = \\ &= 2 \left[15 \arctan x - \frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^2 = 2 \left[15 \arctan 2 - \frac{8}{3} + 2 \right] = \\ &= 30 \arctan 2 - \frac{4}{3}u^2 \end{aligned}$$



- ④ a) Dibujar la región del plano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - x^2 - y \geq 0 \wedge 2y \geq 3x - 3 \wedge y \geq 0\}$
 b) Calcular la superficie de la región A.



Intersección de la recta y la parábola:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = \frac{3x-3}{2} \end{cases} \implies -x^2 + 4x = \frac{3x-3}{2}$$

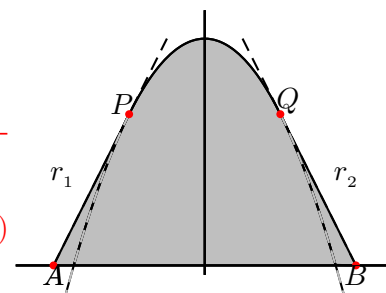
$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \implies \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$S = S_1 + S_2 =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx + \int_1^3 \left[(-x^2 + 4x) - \left(\frac{3x-3}{2} \right) \right] dx = \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx + \int_1^3 \left(-x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \right]_1^3 = \left[-\frac{1}{3} + 2 - 0 \right] + \left[-9 + \frac{45}{4} + \frac{9}{2} \right] - \left[-\frac{1}{3} + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} \right] = \\ &= \frac{5}{3} + 4 + \frac{1}{3} = 6u^2 \end{aligned}$$

⑤ Dada la figura, calcule:

- Las ecuaciones de r_1 y r_2 rectas tangentes a la parábola de ecuación $y = -x^2 + 12$ en los puntos de abscisa -2 y 2 .
- El área sombreada de la figura suponiendo que $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$



- Los puntos de tangencia: $\begin{cases} P(-2, 8) \\ Q(2, 8) \end{cases}$. Derivada de la función $f'(x) = -2x$. Ecuaciones de las rectas tangentes:

$$\begin{cases} \text{En } P : y - 8 = f'(-2)(x + 2) \implies y - 8 = 4(x + 2) \implies r_1 \equiv y = 4x - 16 \\ \text{En } Q : y - 8 = f'(2)(x - 2) \implies y - 8 = -4(x - 2) \implies r_2 \equiv y = -4x + 16 \end{cases}$$

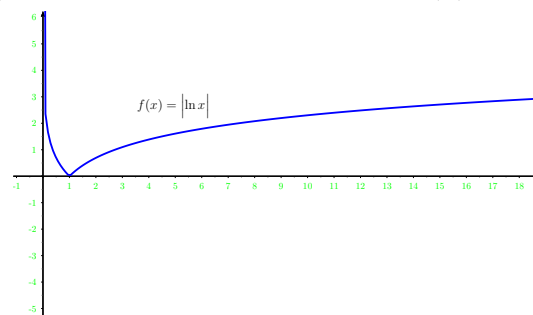
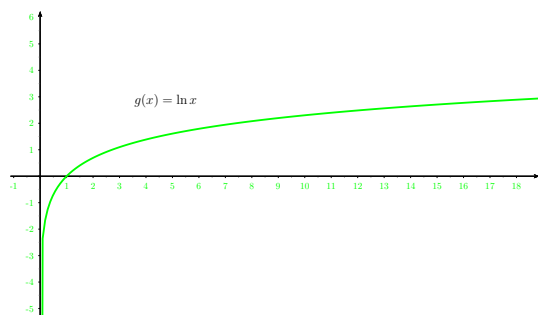
- Por simetría:

$$\begin{aligned} S_T &= 2(S_1 + S_2) = 2 \left[\int_0^2 (12 - x^2) \, dx + \int_2^4 (-4x + 16) \, dx \right] = 2 \left(\left[12x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 + \left[-2x^2 + 16x \right]_2^4 \right) = \\ &= 2 \left[14 - \frac{8}{3} + (-32 + 64) - (-8 + 32) \right] = \frac{176}{3} \, \text{u}^2 \end{aligned}$$

⑥ Sea la función $f(x) = |\ln x|$:

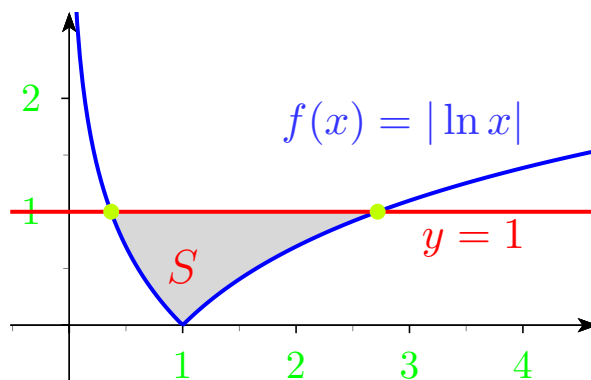
- Dibujar, con la ayuda de la gráfica de la función $g(x) = \ln x$, la gráfica de la función $f(x)$.
- Representar el recinto, S , limitado por la recta $y = 1$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- Calcular la superficie del recinto S .

a) Dibujar, con la ayuda de la gráfica de la función $g(x) = \ln x$, la gráfica de la función $f(x)$.



$$f(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Representar el recinto, S , limitado por la recta $y = 1$ y la gráfica de la función $f(x)$.



c) Calcular la superficie del recinto S .

- Puntos de corte de las funciones (resolver el sistema de ecuaciones)

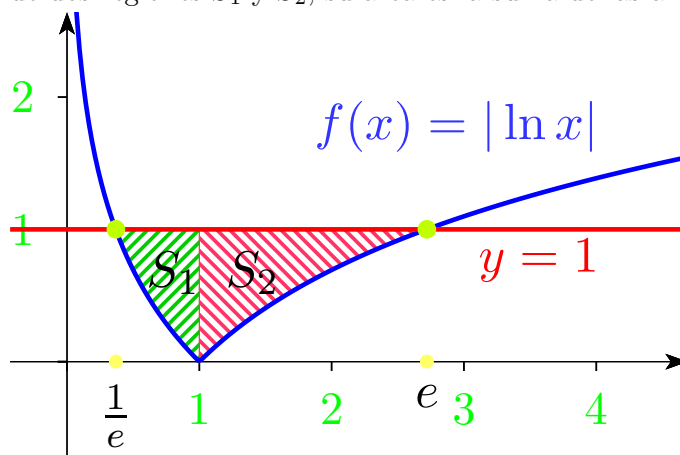
- Si $0 < x < 1$ entonces el sistema es:

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\ln(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -\ln(x) = 1 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- Si $x > 1$ entonces el sistema es:

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \\ y = \ln(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$$

- La región S es la unión de dos regiones S_1 y S_2 , su área es la suma de las áreas de S_1 y S_2 .



- Cálculo de la superficie mediante la integral definida:

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 - (-\ln x)) \, dx + \int_1^e (1 - \ln x) \, dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) \, dx + \int_1^e (1 - \ln x) \, dx = \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^1 1 \, dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx + \int_1^e 1 \, dx - \int_1^e \ln x \, dx \stackrel{(1)}{=} \int_{\frac{1}{e}}^e 1 \, dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx - \int_1^e \ln x \, dx \stackrel{(2)}{=} \\ &= \left[x \right]_{\frac{1}{e}}^e + \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx - \int_1^e \ln x \, dx = \left(e - \frac{1}{e} \right) + \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx - \int_1^e \ln x \, dx \stackrel{(3)}{=} \\ &= e - \frac{1}{e} + \left[x \ln x - x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \left[x \ln x - x \right]_1^e \stackrel{(2)}{=} e - \frac{1}{e} + \left(1 \cdot \ln 1 - 1 - \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) \right) - \\ &= \left(e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1) \right) \stackrel{(4)}{=} e - \frac{1}{e} - 1 + \frac{2}{e} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

La superficie del recinto es: $S = e + \frac{1}{e} - 2 \approx 1,08616 \text{ u}^2$

Razonamientos

- (1) Aditividad del intervalo de integración.
- (2) Regla de Barrow.
- (3) Cálculo de la primitiva de la función $\ln x$ por partes:

$$\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \left| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{array} \right. \implies \int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$$

$$(4) \ln \frac{1}{e} = -1, \ln 1 = 0 \text{ y } \ln e = 1.$$

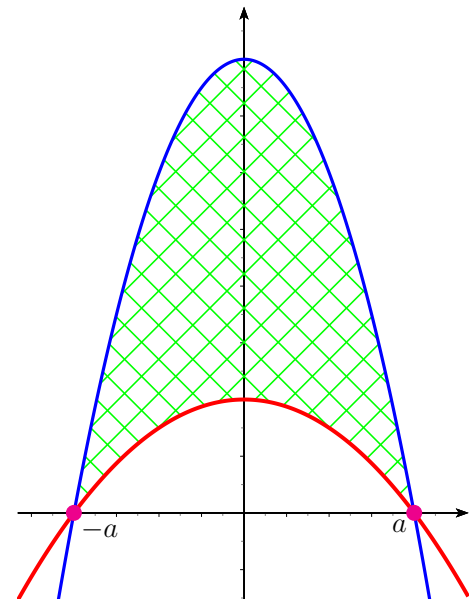
- ⑦ Calcular el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades cuadradas.

- Las funciones f y g son pares, sus gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas y sus vértices son $V_f(0, a^2)$ y $V_g(0, 4a^2)$.
- Puntos de intersección de las dos gráficas.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\implies -x^2 + a^2 = -4x^2 + 4a^2 \implies x^2 = a^2 \\ x &= \pm a \text{ y } f(a) = f(-a) = 0 \end{aligned}$$

Las gráficas se cortan en $P(-a, 0)$ y $Q(a, 0)$, puntos del eje de abscisas.

- $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0 \, \forall x \in [-a, a]$



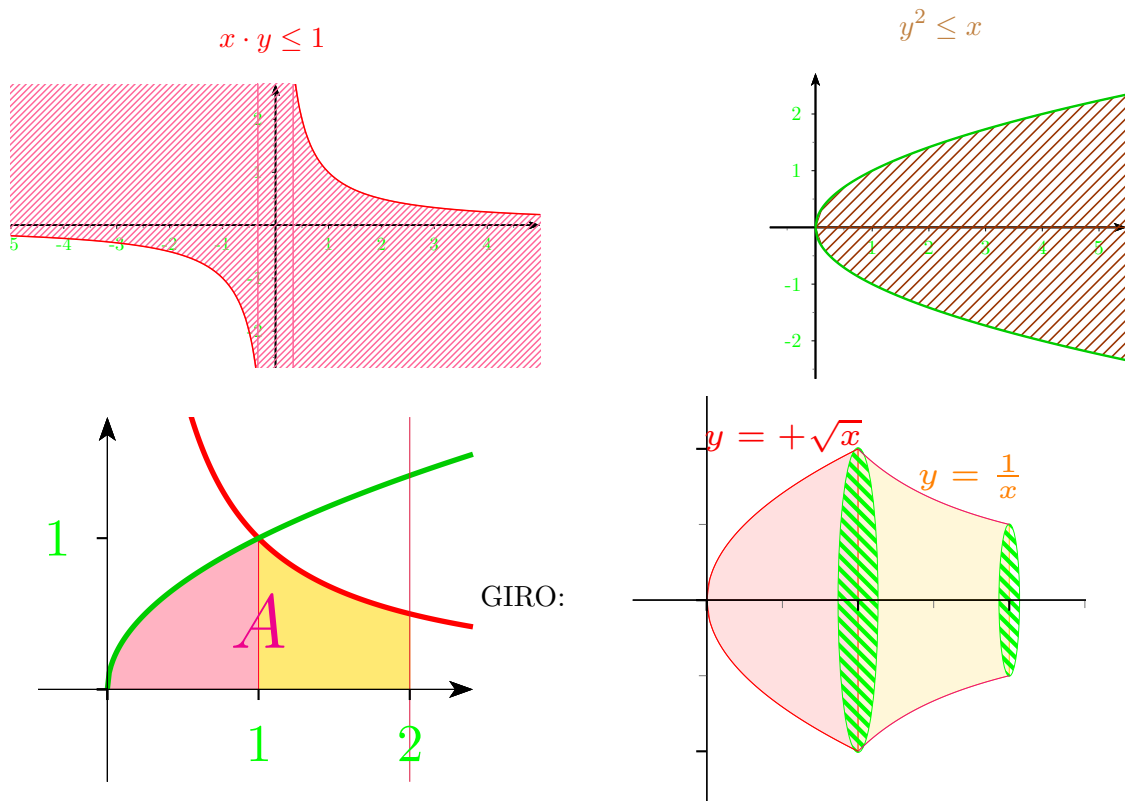
Interpretación geométrica de la integral definida:

$$S = 2 \int_0^a [g(x) - f(x)] \, dx = 32 \implies \int_0^a [g(x) - f(x)] \, dx = 16$$

$$\begin{aligned} \int_0^a [g(x) - f(x)] \, dx &= \int_0^a [-4x^2 + 4a^2 - (-x^2 + a^2)] \, dx = \int_0^a (-3x^2 + 3a^2) \, dx = \left[-x^3 + 3a^2x \right]_0^a = \\ &= -a^3 + 3a^3 - 0 = 2a^3 \\ 2a^3 &= 16 \implies a^3 = 8 \implies a = \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

El área es 32 u² si $a = 2$

- ⑧ Calcular el volumen que engendra la región $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1 \wedge y^2 - x \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 2\}$ al girar alrededor del eje de abscisas.



$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left[\left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 \right] \stackrel{\text{(Barrow)}}{=} \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right] = \pi$$

El volumen engendrado es: $V = \pi u^3$

⑨ Sea la función $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$:

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en su punto de inflexión.
- Calcular el área encerrada por la curva y el eje de abscisas entre $x = -1$ y la abscisa del punto de inflexión.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en su punto de inflexión.

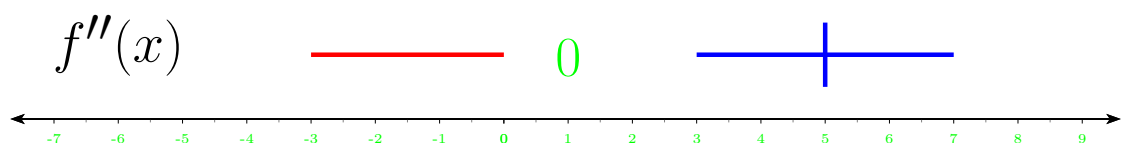
Dominio de la función: $D_f = \mathbb{R}$ ya que $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Condición necesaria de punto de inflexión si la función es, al menos, dos veces derivable: $f''(x) = 0$.

$$f(x) = (x+1)e^{-x} \implies f'(x) = -xe^{-x} \implies f''(x) = (x-1)e^{-x} = \frac{x-1}{e^x}$$

$$f''(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

Condición suficiente de punto de inflexión, criterio del cambio de signo de la segunda derivada:



En el punto $P(1, f(1)) = (1, 2e^{-1})$ la función alcanza un punto de inflexión.

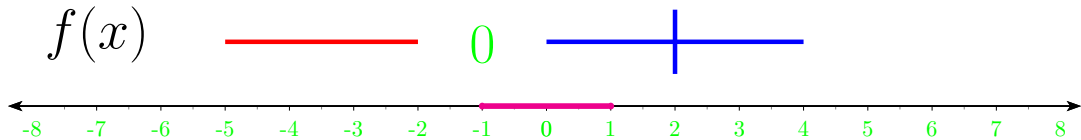
Interpretación geométrica de la derivada: $m_T = f'(1) = -e^{-1}$. Ecuación de la recta tangente:

$$y - f(1) = m_T(x - 1) \implies y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x - 1) \implies x + ey - 3 = 0$$

La ecuación de la tangente en el punto de inflexión es $x + ey - 3 = 0$

- b) Calcular el área encerrada por la curva y el eje de abscisas entre $x = -1$ y la abscisa del punto de inflexión.

Signo de la función $f(x)$. El punto de corte con el eje de abscisas es $x = -1$.



En el intervalo $[-1, 1]$ la función es $f(x) \geq 0$, el área encerrada con el eje de abscisas es el valor de la integral definida en dicho intervalo.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x+1)e^{-x} dx \stackrel{(1)}{=} \left[-(x+1)e^{-x} + \int e^{-x} dx \right]_{-1}^1 = \left[-(x+2)e^{-x} \right]_{-1}^1 \stackrel{(2)}{=} \\ &= -\left[3e^{-1} - e \right] = e - \frac{3}{e} = \frac{e^2 - 3}{e} \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) La integral se calcula por el método de integración por partes

$$\begin{array}{lcl} u & = & x+1 \\ dv & = & e^{-x} dx \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} du & = & dx \\ v & = & \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right.$$

- (2) Regla de Barrow.

El área comprendida entre la función y el eje de abscisas es $S = \frac{e^2 - 3}{e} u^2$

- ⑩ La función $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ es continua en $[0, +\infty)$.

- a) Hallar el valor de a que hace que esta afirmación sea cierta.

- b) Calcular $\int_0^{10} f(x) dx$

- a) Hallar el valor de a que hace que esta afirmación sea cierta.

Por la condiciones del problema $\boxed{a > 0}$.

Dominio de la función: $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = [0, 8] \cup (8, +\infty) = [0, +\infty)$.

Definición de continuidad: $\exists \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(8)$:

- $8 \in D_f$ y $f(8) = \sqrt{8a}$.
- Límite lateral por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{ax} = \sqrt{8a}$.

- Límite lateral por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 32}{x - 4} = \frac{32}{4} = 8$.
 - La función es continua en $x = 8 \iff \sqrt{8a} = 8 \iff a = 8$.
- $\forall x \in D_f \setminus \{8\}$, la función es continua por ser composición u operaciones de funciones continuas.

Si $a = 8$ entonces la función es continua en su dominio.

b) Calcular $\int_0^{10} f(x) \, dx$

Por la aditividad del intervalo de integración:

$$\int_0^{10} f(x) \, dx = \int_0^8 \sqrt{8x} \, dx + \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} \, dx$$

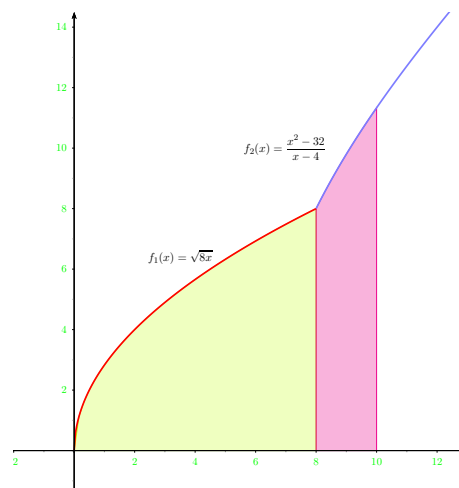
$$\int_0^8 \sqrt{8x} \, dx = \frac{1}{8} \int_0^8 (8x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{8} \left[\frac{(8x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^8 \stackrel{\text{Regla de Barrow}}{=} \frac{1}{12} [64^{\frac{3}{2}} - 0] = \frac{1}{12} \cdot 8^3 = \frac{128}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} \, dx &\stackrel{(1)}{=} \int_8^{10} \left(x + 4 - \frac{16}{x - 4} \right) \, dx \stackrel{(2)}{=} \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x - 16 \ln |x - 4| \right]_8^{10} \stackrel{\text{Regla de Barrow}}{=} \\ &= \left[50 + 40 - 16 \ln 6 - (32 + 32 - 16 \ln 4) \right] = 26 + 16 \ln \left(\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Fracción algebraica impropia (división de polinomios): $\frac{x^2 - 32}{x - 4} = x + 4 - \frac{16}{x - 4}$.
- (2) Integrales inmediatas (potencia y logaritmo neperiano).

$$\int_0^{10} f(x) \, dx = \frac{128}{3} + 26 + 16 \ln \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{206}{3} + 16 \ln \left(\frac{2}{3} \right)$$



- ⑪ Sea $C(t)$ el dinero en miles de euros que hay depositado en un día en una sucursal bancaria, en función del tiempo t en horas desde que la sucursal está abierta. Sabiendo que $C'(t) = t^2 - 7t + 10$ y que la sucursal permaneció abierta un total de 8 horas:

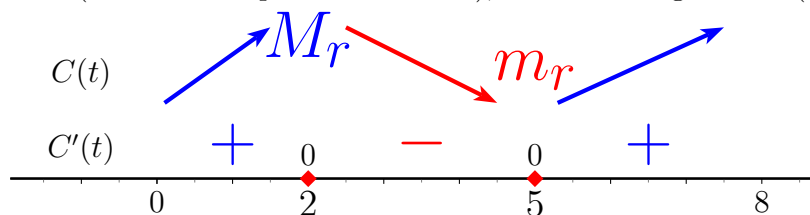
- Hallar los máximos y mínimos locales de la función $C(t)$.
- Obtener la expresión de $C(t)$ sabiendo que a las 6 horas de estar abierta la sucursal disponía de 20000 euros.

- a) Hallar los máximos y mínimos locales de la función $C(t)$.

- El dominio de la función $C(t)$ es $[0, 8]$.
- Condición necesaria de punto crítico: $C'(t) = 0$:

$$C'(t) = 0 \implies t^2 - 7t + 10 = 0 \implies t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} t = 5 \\ t = 2 \end{cases}$$

- Condición suficiente (criterio de la primera derivada), estudio del signo de $C'(t)$:



- La función $C(t)$ alcanza máximo relativo a las 2 horas de la apertura y en el momento del cierre ($t = 8$).
- La función $C(t)$ alcanza mínimo relativo en el momento de abrir ($t = 0$) y a las 5 horas de abrir.

b) Obtener la expresión de $C(t)$ sabiendo que a las 6 horas de estar abierta la sucursal disponía de 20000 euros.

La función $C(t)$ es la primitiva de la función $C'(t)$ tal que $C(t = 6) = 20$ (miles de euros).

- $C(t) = \int (t^2 - 7t + 10) dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t + C$.
- $C(t = 6) = 72 - 126 + 60 + C = 20 \implies C = 14$

La función miles de euros depositados es $C(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t + 14$

⑫ Hallar los valores de a y b sabiendo que la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$ tiene un extremo relativo en $x = 1$ y $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln(4)$.

- La condición necesaria de extremo local si la función es derivable es $f'(1) = 0$:

$$f'(x) = 2ax + \frac{b}{x} \text{ sustituyendo } x = 1: 2a + b = 0 \implies b = -2a \quad (*)$$

- Primitiva de la función:

$$\int (ax^2 + b \ln x) dx = \frac{a}{3}x^3 + b \int \ln x dx \stackrel{(1)}{=} \frac{a}{3}x^3 + bx(\ln x - 1)$$

- Integral definida (Regla de Barrow):

$$\int_1^4 (ax^2 + b \ln x) dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + bx(\ln x - 1) \right]_1^4 = \frac{64a}{3} + b(4 \ln 4 - 4) - \left[\frac{a}{3} - b \right] = 21a - 3b + 4b \ln 4$$

$$21a - 3b + 4b \ln 4 = 27 - 8 \ln 4 \quad (**)$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones (*) y (**):

$$21a + 6a - 8a \ln 4 = 27 - 8 \ln 4 \implies a(27 - 8 \ln 4) = 27 - 8 \ln 4 \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

La función que cumple las dos condiciones es $f(x) = x^2 - 2 \ln x$

Razonamientos

- (1) La integral $\int \ln(x) \, dx$ se efectúa por partes: $\left. \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = x \end{array}$
- entonces $\int \ln(x) \, dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1)$

⑬ Dada la función $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$:

- a) Hallar en qué punto la tangente a la función es perpendicular a la recta de ecuación $4x - 2y + 3 = 0$.
- b) Representar el recinto, S , limitado por la gráfica de la función f , la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas.
- c) Hallar el área del recinto S .

- a) Hallar en qué punto la tangente a la función es perpendicular a la recta de ecuación $4x - 2y + 3 = 0$.

La función $f(x)$ es polinómica, continua y derivable en todo su dominio $D_f = \mathbb{R}$.

Condición de rectas perpendiculares:

$$m_T \cdot m_r = -1. \text{ La recta } r \equiv y = 2x + \frac{3}{2} \implies m_r = 2 \implies m_T = -\frac{1}{2}$$

Derivada de la función:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x = m_T = -\frac{1}{2} \implies x = 1 \text{ y } f(1) = \frac{9 - 1}{4} = 2$$

El punto de tangencia es $T(1, 2)$

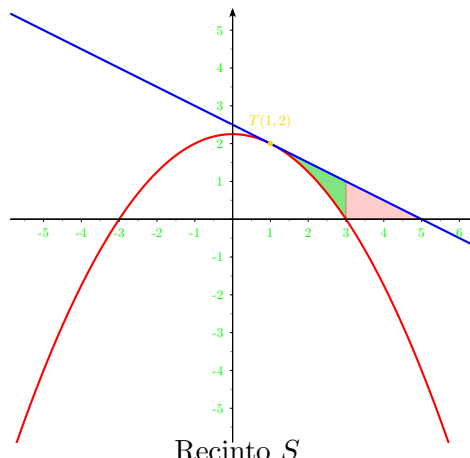
La ecuación de la tangente: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

La ecuación de la recta tangente es $x + 2y - 5 = 0$

- b) Representar el recinto, S , limitado por la gráfica de la función f , la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas.

La gráfica de la función $f(x)$ es una parábola de vértice $V(0, \frac{9}{4})$ y coeficiente cuadrático negativo ($\cap$).

La recta $y = \frac{1}{2}(5 - x)$ es la tangente a la función en el punto T .



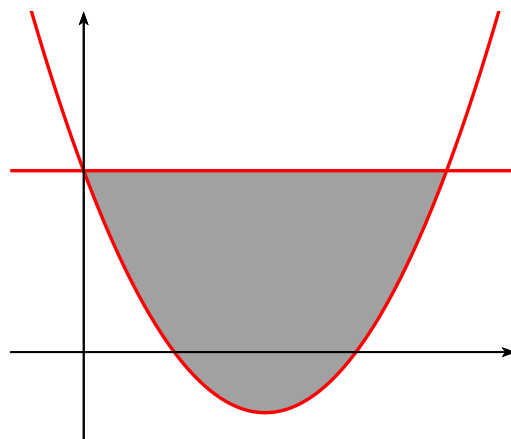
Recinto S

c) Hallar el área del recinto S .

$$\begin{aligned}
 S = S_1 + S_2 &= \int_1^3 \left[\frac{1}{2}(5-x) - \frac{1}{4}(9-x^2) \right] dx + \int_3^5 \left[\frac{1}{2}(5-x) \right] dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int_1^3 (x^2 - 2x + 1) dx + \frac{1}{2} \int_3^5 (5-x) dx = \frac{1}{4} \int_1^3 (x-1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_3^5 (5-x) dx = \\
 &= \frac{1}{12} \left[(x-1)^3 \right]_1^3 - \frac{1}{4} \left[(5-x)^2 \right]_3^5 = \frac{1}{12}(2^3 - 0) - \frac{1}{4}(0 - 4) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

La superficie del recinto es $S = \frac{5}{3} \text{ u}^2$

- ⑭ La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ representada respecto a los ejes coordenados. Calcular el área de la parte sombreada.

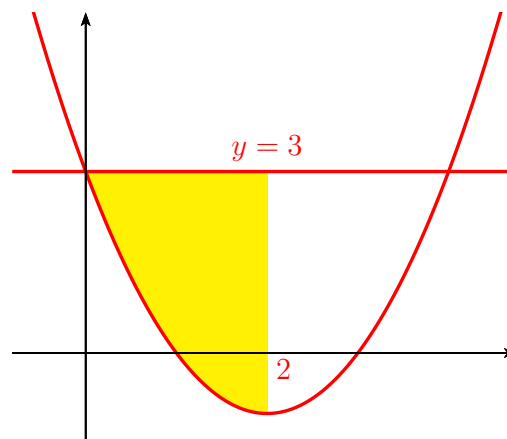


Función parabólica $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$:

- Corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 3)$, la recta que limita la región sombreada es $y = 3$.
- Corta al eje de abscisas en los puntos $(1, 0)$ y $(3, 0)$ (solución de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$).
- Vértice de la parábola $V(2, -1)$.

La recta $x = 2$ es eje de simetría de la parábola y divide la región en dos partes iguales.

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^2 (3 - (x^2 - 4x + 3)) dx = 2 \int_0^2 (-x^2 + 4x) dx = \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \stackrel{\text{Barrow}}{=} 2 \left(-\frac{8}{3} + 8 - 0 \right) = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$



El área de la región sombreada es $\frac{32}{3} \text{ u}^2$